This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06909694 3

Geometry 1822.
(I.C)

Geometrische Analysis,

von

John Leslie.

PRIOR LIBRARY
NEW-YORK

Aus dem Englischen übersetzt

und sehr vermehrt

von

J. P. Grüson.

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin, 1822.

In der Schlesingerschen Buch- und Musikhandlung.

Vorrede.

Der berühmte Physiker Herr John Leslie, Professor zu Edinburgh, hat 1811 die zweite Ausgabe seiner Elements of geometry, geometrical analysis, and plane trigonometry; — Vol. in 8. auf 500 Seiten besorgt. Die hier gelieferte Uebersetzung macht den zweiten Theil von diesen Elementen aus, deren erster Theil von der graden Linie und dem Kreise in einer Ebene handelt; der dritte Theil enthält die ebene Trigonometrie, und damit dieser Uebersetzung nichts fehle, habe ich auch die wenigen Anmerkungen der franz. Uebersetzung von Hr. Comte, welche in dem Second supplement de la géometrie descriptive par M. Hachette, Paris 1818, in 4to S. 33 stehen, aufgenommen.

Der Autor sieht die geometrische Analysis als eine treffliche Abhandlung der Logik an, und macht den Geometern des festen Landes

den Vorwurf, sie zu sehr vernachläßiget zu haben. Die Geschichte lehrt uns, daß man sie in den ältern griechischen Schulen mit vieler Sorgfalt studirte, und daß sie aus folgenden acht Schriften bestand, deren Titel Hr. Leslie so anzeigt, wie uns solche Pappus, ein Geometer aus der Mitte des vierten Jahrhunderts nach C. G., in seiner Sammlung geom. Untersuchungen hinterlassen hat.

Erste Schrift. Euklides Data. Ein einziges sehr ausgedehntes Buch, welches nur in der von Schwab (Stuttgard 1780) nach der englischen Ausgabe von Robert Simson gemachten deutschen Uebersetzung, 100 ganz einfache Sätze enthält.

Diese Data kann jeder mit Nutzen nach den 6 ersten Büchern der Elemente des Euklides studiren.

Zweite Schrift. Vom Verhältnißschnitt. In zwei Büchern. Man betrachtet darin grade, in einer Ebene gegebene Linien, und nimmt an, sie werden durch andre grade Linien geschnitten, deren Lage durch die Verhältnisse der zwischen liegenden Theile bestimmt ist; dieses nennt man gegenwärtig Theorie der Transversalen, der harmonischen Linien etc.

Diese Schrift, welche Newton sehr schätzte, hat sich in einer arabischen Uebersetzung erhalten, welche Halley (Oxford 1706. 8.) in lateinischer Sprache herausgab, und ihr die von ihm wieder hergestellte Schrift vom Flächenschnitt beifügte.

Dritte Schrift. Vom Flächenschnitt. Dieses Buch fehlt; kaum ist eine Spur davon übrig geblieben. Man glaubt, nach einigen Andeutungen vom Pappus, daß es darauf ankomme, vermittelst zweier grader Linien, und aus deren Transversalen, Polygone zu construiren, deren Flächeninhalt gleich einem gegebenen Rect. sei. Diese Schrift ist von Halley wieder hergestellt worden. (Siehe zweite Schrift.)

Vierte Schrift. Vom bestimmten Schnitt. In zwei Büchern, die ebenfalls verloren gegangen sind. Die glückliche Wiederherstellung von Robert Simson, ist jetzt in einer deutschen freien Uebersetzung von dem Hrn. Prof. Diesterweg unter folgendem Titel erschienen: Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata, wiederhergestellt von Robert Simson ꝛc. Mainz, in 8. 1822.

Fünfte Schrift. Von den Neigungen (besser von den Richtungen). In zwei Büchern.

Man verlangte durch einen gegebenen Punkt und zwischen zwei ebenfalls gegebenen Linien eine dritte Linie von gegebener Größe zu ziehen. Burrow gab diese Bücher Lond. 1779 heraus.

Sechsste Schrift. Von den Berührungen. In zwei Büchern, von welchen man nur einige Lehnsätze aufbewahrt hat. Es wird darin von den Berührungen der Kreise gehandelt. Viete, ein Geometer am Ende des 16ten Jahrhunderts, hat die Auflösungen von diesen Aufgaben wiedergefunden; unten darüber mehr.

Diese sechs ersten Schriften sind eine Erfindung des Apollonius von Pergen, eines Geometers, welcher 244 Jahre vor C. G. lebte.

Siebente Schrift. Von den ebenen Oertern. In zwei Büchern. Ihr Zweck ist es, zu bestimmen, in welchen Fällen ein sich bewegender Punkt eine grade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Kreis beschreibt. Wir Deutschen haben Apollonius von Pergen ebene Oerter, wiederhergestellt von Robert Simson; aus dem Latein. übersetzt ꝛc. von J. W. Camerer, 8. Leipz. 1796, welches Werk ganz vorzüglich dem Liebhaber zu empfehlen ist.

Aechte Schrift. Von den Porismen. In dreien, von Euklides, der 400 Jahre vor C. G. lebte, abgefaßten Büchern. Es ist uns davon keine Spur geblieben, ausgenommen was uns Pappus davon in sehr dunklen Ausdrücken überliefert hat. Es war dem englischen Geometer Robert Simson vorbehalten, diese Arbeit des Euklides in einem 1776, nach dem Tode des Verfassers, auf Kosten des Grafen Stanhope herausgegebenen Werke bekannt zu machen.

Herr Leslie hat die Hauptsätze der Elementargeometrie der Alten mit vieler Ordnung und Klarheit in drei Büchern vereiniget. Dieses Werk, mit Euklid's Elementen verbunden, vervollständigt den Theil der Geometrie, der von der graden Linie und von dem in einer Ebene betrachteten Kreise handelt, und lehrt die Methoden kennen, welche die alten Geometer in ihren Untersuchungen und bei ihren Demonstrationen befolgten.

Herr Leslie sagt Seite 434. des Originals von seiner Arbeit selbst Folgendes:

„Diese drei Bücher haben den Zweck, klar den Gebrauch zu zeigen, welchen die griechischen Geometer von ihrer Analysis gemacht haben. Um

dieſen Zweck zu erfüllen, habe ich eine Folge von Sätzen ausgewählt, welche wachſende Schwierigkeiten darbieten, indem man von der einfachſten Aufg. zu zuſammengeſetzteren fortgehet.“

„Das erſte Buch, welches Aufg. verſchiedener Art enthält, iſt aus mehreren Quellen gezogen. Der 25. u. 26. Satz enthalten die Analyſis von zweien, in der platoniſchen Schule berühmten Aufgaben: die Dreitheilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels. Dieſe Aufgaben führen unmittelbar zu einer höhern Geometrie. Der letzte Lehrſ. in dieſem Buche iſt der einzige, welcher aus Euklid. Data genommen iſt.“

„Im zweiten und dritten Buche, habe ich geſucht die Analyſis der Alten in ihrem vollkommenſten Zuſtande darzuſtellen, und mit der Ausdehnung, welche Apollonius und ſeine berühmten Zeitgenoſſen ihr gegeben haben. Ohne die Hauptaufg. auszulaſſen, habe ich die langen und ermüdenden Einzelheiten vermieden. Unſer heutiges Erziehungsſyſtem iſt ſo ausgedehnt, daß keine Muße bleibt, ſich Studien zu überlaſſen, welche wenige Geiſtesarbeiten erfordern.“

„Die in den ältern Schulen ſo ſehr geachtete

analytische Methode wurde der Gegenstand des Unterrichtes, wenn man die Elemente der Geometrie erlernt hatte. Nach Pappus hatten sie die oben genannten acht Schriften."

„Die Porismen des Euklid's sind, mit einigen Zusätzen, in den Sätzen 18 u. 19 des dritten Buches enthalten. Die letztern Sätze dieses Buchs betreffen die isoperimetrischen Figuren. Ob ich gleich diesen Gegenstand mit der Kürze der neuern Geometer abgehandelt habe, so wird man, hoffe ich, doch sehen, daß ich nicht von dem Geiste der Alten abgewichen bin."

Mein Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergen von den Berührungen, ist bereits einige 30 Jahre alt, und war die Frucht einer Aufforderung des seligen berühmten Basedow, der ich, zu seiner nicht geringen Verwunderung, in drei Tagen Gnüge leistete, ohne damals von dieser berühmten Aufg. mehr, als die hier in der Uebersetzung mitgetheilten Hülfssätze des Pappus zu kennen. Ich darf sogar gestehen, daß ich, bevor ich die Hülfssätze kannte, in einem Tage das Problem rein geom. gelöst habe;

Geometry 1822.
(I.c)

Geometrische Analysis,

von

John Leslie.

ASTOR LIBRARY
NEW-YORK

Aus dem Englischen übersetzt

und sehr vermehrt

von

J. P. Grüson.

Mit 5 Kupfertafeln.

Berlin, 1822.
In der Schlesingerschen Buch- und Musikhandlung.

Vorrede.

Der berühmte Physiker Herr John Leslie, Professor zu Edinburgh, hat 1811 die zweite Ausgabe seiner Elements of geometry, geometrical analysis, and plane trigonometry; — Vol. in 8. auf 500 Seiten besorgt. Die hier gelieferte Uebersetzung macht den zweiten Theil von diesen Elementen aus, deren erster Theil von der graden Linie und dem Kreise in einer Ebene handelt; der dritte Theil enthält die ebene Trigonometrie, und damit dieser Uebersetzung nichts fehle, habe ich auch die wenigen Anmerkungen der franz. Uebersetzung von Hr. Comte, welche in dem Second supplement de la géometrie descriptive par M. Hachette, Paris 1818, in 4to S. 33 stehen, aufgenommen.

Der Autor sieht die geometrische Analysis als eine treffliche Abhandlung der Logik an, und macht den Geometern des festen Landes

den Vorwurf, ſie zu ſehr vernachläßiget zu haben. Die Geſchichte lehrt uns, daß man ſie in den ältern griechiſchen Schulen mit vieler Sorgfalt ſtudirte, und daß ſie aus folgenden acht Schriften beſtand, deren Titel Hr. Leslie ſo anzeigt, wie uns ſolche Pappus, ein Geometer aus der Mitte des vierten Jahrhunderts nach C. G., in ſeiner Sammlung geom. Unterſuchungen hinterlaſſen hat.

Erſte Schrift. Euklides Data. Ein einziges ſehr ausgedehntes Buch, welches nur in der von Schwab (Stuttgard 1780) nach der engliſchen Ausgabe von Robert Simſon gemachten deutſchen Ueberſetzung, 100 ganz einfache Sätze enthält.

Dieſe Data kann jeder mit Nutzen nach den 6 erſten Büchern der Elemente des Euklides ſtudiren.

Zweite Schrift. Vom Verhältnißſchnitt. In zwei Büchern. Man betrachtet darin grade, in einer Ebene gegebene Linien, und nimmt an, ſie werden durch andre grade Linien geſchnitten, deren Lage durch die Verhältniſſe der zwiſchen liegenden Theile beſtimmt iſt; dieſes nennt man gegenwärtig Theorie der Transverſalen, der harmoniſchen Linien etc.

Diese Schrift, welche Newton sehr schätzte, hat sich in einer arabischen Uebersetzung erhalten, welche Halley (Oxford 1706. 8.) in lateinischer Sprache herausgab, und ihr die von ihm wieder hergestellte Schrift vom Flächenschnitt beifügte.

Dritte Schrift. Vom Flächenschnitt. Dieses Buch fehlt; kaum ist eine Spur davon übrig geblieben. Man glaubt, nach einigen Andeutungen vom Pappus, daß es darauf ankomme, vermittelst zweier grader Linien, und aus deren Transversalen, Polygone zu construiren, deren Flächeninhalt gleich einem gegebenen Rect. sei. Diese Schrift ist von Halley wieder hergestellt worden. (Siehe zweite Schrift.)

Vierte Schrift. Vom bestimmten Schnitt. In zwei Büchern, die ebenfalls verloren gegangen sind. Die glückliche Wiederherstellung von Robert Simson, ist jetzt in einer deutschen freien Uebersetzung von dem Hrn. Prof. Diesterweg unter folgendem Titel erschienen: Die Bücher des Apollonius von Perga de sectione determinata, wiederhergestellt von Robert Simson ꝛc. Mainz, in 8. 1822.

Fünfte Schrift. Von den Neigungen (besser von den Richtungen). In zwei Büchern.

Man verlangte durch einen gegebenen Punkt und zwiſchen zwei ebenfalls gegebenen Linien eine dritte Linie von gegebener Größe zu ziehen. Burrow gab dieſe Bücher Lond. 1779 heraus.

Sechsſte Schrift. Von den Berührungen. In zwei Büchern, von welchen man nur einige Lehnſätze aufbewahrt hat. Es wird darin von den Berührungen der Kreiſe gehandelt. Viete, ein Geometer am Ende des 16ten Jahrhunderts, hat die Auflöſungen von dieſen Aufgaben wiedergefunden; unten darüber mehr.

Dieſe ſechs erſten Schriften ſind eine Erfindung des Apollonius von Pergen, eines Geometers, welcher 244 Jahre vor C. G. lebte.

Siebente Schrift. Von den ebenen Oertern. In zwei Büchern. Ihr Zweck iſt es, zu beſtimmen, in welchen Fällen ein ſich bewegender Punkt eine grade Linie, oder einen der Lage nach gegebenen Kreis beſchreibt. Wir Deutſchen haben Apollonius von Pergen ebene Oerter, wiederhergeſtellt von Robert Simſon; aus dem Latein. überſetzt ꝛc. von J. W. Camerer, 8. Leipz. 1796, welches Werk ganz vorzüglich dem Liebhaber zu empfehlen iſt.

Achte Schrift. Von den Porismen. In dreien, von Euklides, der 400 Jahre vor C. G. lebte, abgefaßten Büchern. Es ist uns davon keine Spur geblieben, ausgenommen was uns Pappus davon in sehr dunklen Ausdrücken überliefert hat. Es war dem englischen Geometer Robert Simson vorbehalten, diese Arbeit des Euklides in einem 1776, nach dem Tode des Verfassers, auf Kosten des Grafen Stanhope herausgegebenen Werke bekannt zu machen.

Herr Leslie hat die Hauptsätze der Elementargeometrie der Alten mit vieler Ordnung und Klarheit in drei Büchern vereiniget. Dieses Werk, mit Euklid's Elementen verbunden, vervollständigt den Theil der Geometrie, der von der graden Linie und von dem in einer Ebene betrachteten Kreise handelt, und lehrt die Methoden kennen, welche die alten Geometer in ihren Untersuchungen und bei ihren Demonstrationen befolgten.

Herr Leslie sagt Seite 434. des Originals von seiner Arbeit selbst Folgendes:

„Diese drei Bücher haben den Zweck, klar den Gebrauch zu zeigen, welchen die griechischen Geometer von ihrer Analysis gemacht haben. Um

dieſen Zweck zu erfüllen, habe ich eine Folge von Sätzen ausgewählt, welche wachſende Schwierigkeiten darbieten, indem man von der einfachſten Aufg. zu zuſammengeſetzteren fortgehet.“

„Das erſte Buch, welches Aufg. verſchiedener Art enthält, iſt aus mehreren Quellen gezogen. Der 25. u. 26. Satz enthalten die Analyſis von zweien, in der platoniſchen Schule berühmten Aufgaben: die Dreitheilung des Winkels und die Verdoppelung des Würfels. Dieſe Aufgaben führen unmittelbar zu einer höhern Geometrie. Der letzte Lehrſ. in dieſem Buche iſt der einzige, welcher aus Euklid. Data genommen iſt.“

„Im zweiten und dritten Buche, habe ich geſucht die Analyſis der Alten in ihrem vollkommenſten Zuſtande darzuſtellen, und mit der Ausdehnung, welche Apollonius und ſeine berühmten Zeitgenoſſen ihr gegeben haben. Ohne die Hauptaufg. auszulaſſen, habe ich die langen und ermüdenden Einzelheiten vermieden. Unſer heutiges Erziehungsſyſtem iſt ſo ausgedehnt, daß keine Muße bleibt, ſich Studien zu überlaſſen, welche wenige Geiſtesarbeiten erfordern.“

„Die in den ältern Schulen ſo ſehr geachtete

analytische Methode wurde der Gegenstand des Unterrichtes, wenn man die Elemente der Geometrie erlernt hatte. Nach Pappus hatten sie die oben genannten acht Schriften."

„Die Porismen des Euklid's sind, mit einigen Zusätzen, in den Sätzen 18 u. 19 des dritten Buches enthalten. Die letztern Sätze dieses Buchs betreffen die isoperimetrischen Figuren. Ob ich gleich diesen Gegenstand mit der Kürze der neuern Geometer abgehandelt habe, so wird man, hoffe ich, doch sehen, daß ich nicht von dem Geiste der Alten abgewichen bin."

Mein Versuch einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius von Pergen von den Berührungen, ist bereits einige 30 Jahre alt, und war die Frucht einer Aufforderung des seligen berühmten Basedow, der ich, zu seiner nicht geringen Verwunderung, in drei Tagen Gnüge leistete, ohne damals von dieser berühmten Aufg. mehr, als die hier in der Uebersetzung mitgetheilten Hülfssätze des Pappus zu kennen. Ich darf sogar gestehen, daß ich, bevor ich die Hülfssätze kannte, in einem Tage das Problem rein geom. gelöst habe;

allein mit Recht erinnerte mein höchst verehrungswürdiger Lehrer, der selige Consistorialr. und Rektor Funk: daß zwar meine Auflösung richtig, und sogar einer Bekanntmachung werth sei, allein auf den Namen einer Wiederherstellung der Bücher des Apollonius keine Ansprüche machen dürfe, indem ich von ganz andern Sätzen als die Hülfssätze des Pappus ausgegangen sei, und wie er nicht leugnen könne, zwar das Hauptproblem dadurch einfacher gelöst, aber auch sehr viele Fälle übergangen habe. Funk verschaffte mir die Uebersetzung der Hülfssätze des Pappus, und nun lieferte ich den hier mitgetheilten Versuch, der drei Tage Zeit erforderte, weil ich von meiner früheren Auflösung wenig Gebrauch machen konnte.

Ich bescheide mich, daß mein Versuch, als eine viel zu flüchtige Arbeit, sich keiner zu strengen Kritik unterwerfen könne, und obgleich Funk und Basedow ihn sehr gerathen nannten, so bin ich doch überzeugt, daß, wenn ich gegenwärtig die Zeit darauf verwenden wollte, welche eine strenge Kritik verlangt, Manches verändert und anders gestellt werden dürfte; indessen kann dieses höchstens nur Nebendinge und nicht die Hauptsache betreffen.

Die Geschichte dieser Wiederstellung findet [illegible]

in der trefflichen Schrift: Apollonii de tactionibus quae supersunt etc. a. J. Gu. Camerer, Gothae ap. C. Gu. Ettinger et Amstelod. ap. J. St. van Esveldt Holtorp et Socios. 1795. 8. Das neueste ist: Leitfaden zur vollst. Bearbeitung des wiederhergestellten Apollonius von Franziscus Viete, — entworfen von G. U. A. Vieth. 4. Dessau 1810.

Meiner Auflösung lasse ich Seite 272 eine analytische Auflösung folgen, die wegen ihrer bewunderungswürdigen Einfachheit mehr bekannt zu sein verdient. Damit verwandt, theile ich auch Seite 293 die von demselben Verfasser gemachte interessante Aufsuchung des Kreises, welcher drei andere auf einer Kugel berührt, mit.

Den Beschluß macht der Abdruck einer Abhandlung von mir, aus den Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahre 1815. Ich glaube noch immer, daß die Euklidische Geometrie nicht allein auf diesem Wege erweitert, sondern auch in ihren Methoden sehr vereinfacht werden kann. Zu diesem Abdruck habe ich noch einige Zusätze, die Eigenschaften und die Anwendungen des Punkts der mittlern Entfer-

zung betreffend, hinzugefügt, und dazu Herr L'Huiliers Elemens d'analyse géometrique etc. Paris 1809. in 4to frei benutzt.

In Fischers Anmerkungen zu seinem Lehrbuche der Mathematik. Erstes Heft. Berlin und Leipzig bei Nauk 1820. 8. findet sich Seite 151 ein sehr lesenswerther Aufsatz: Ueber die geom. Analysis der Alten von Otto Schulz. Hrn. Prof. Schulz Empfehlung, daß man wenigstens beim Schulunterricht den Weg der Alten nicht ganz verlassen möge, verdient um so mehr beachtet zu werden, da er selbst den Methoden der Neuern, da, wo es um die Sache und nicht mehr um die formale Bildung zu thun ist, den Vorzug einräumt, und also gar kein blinder Verehrer der Alten ist.

Ich glaube daher, daß das vorliegende Werk sehr geeignet ist, sich mit den Methoden der Alten vertraut zu machen.

Berlin, am 5ten des August 1822.

Grüson.

Geome-

Geometrische Analysis.

Die Analysis *) ist die Methode, wodurch ein Satz durch eine Verkettung nothwendiger Folgerungen auf ein bekanntes Verfahren oder auf ein als wahr erkanntes Princip zurückgebracht ist.

Sie ist sowohl auf Untersuchung der Wahrheit eines Lehrsatzes als auf die Entdeckung der zur Auflösung einer Aufgabe geeigneten Construktion anwendbar. Die Analysis ist eine umgekehrte Form von Auflösung. Von der als wahr vorausgesetzten Hypothese ausgehend steigt sie Schritt vor Schritt, bis sie ein bekanntes Princip erreicht hat. Das Umgekehrte von die-

*) Griechisches Wort: Ἀνάλυσις (analūsis) abgeleitet von ἀνά (ana): auf, nach der Ordnung, theilweise und von λύω (lūō): ich löse.

ſer Methode iſt die Syntheſis, die gewöhnlich zum Vortrage der Elemente der Wiſſenſchaften angewendet wird. Die Analyſis iſt eigentlich das Inſtrument der Erfindung, da hingegen die Syntheſis ungekünſtelter der Leitung des Vortrages der Entdeckungen gewidmet iſt.

Erstes Buch.

Erklärungen.

1. In jeder Aufg. nennt man **Gegebene** diej. Größen, welche nach der bloßen Aussage der Aufgabe bestimmt sind und diejenigen, welche aus dem Vorhergehenden durch schon bekannte Hülfsmittel abgeleitet werden können.
2. Man sagt: ein **Verhältniß ist gegeben**, wenn es gleich dem Verh. von gegebenen Größen ist.
3. Die Linien, die Punkte, die Ausdehnungen in einer fixen **Lage** sind gegeben, wenn sie aus der Aussage der Aufgabe hervorgehen oder durch bereits bekannte Hülfsmittel daraus abgeleitet werden können.
4. Ein Kreis ist der **Lage und Größe nach gegeben**, wenn sein Mittelp. und sein Halbm. gegeben sind.
5. Eine geradlinige Figur heißt der **Gattung nach gegeben**, wenn sie einer gegebenen Figur ähnlich ist.

I. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene P. zwei schiefe Linien nach einer geraden Linie zu ziehen, die gegen letztere gleich geneigt sind.

Es seien A, B (Fig. 1, Taf. 1) die zwei gegebene P. und CD eine der Lage nach gegebene gerade L.; man verlangt AG und BG so zu ziehen, daß die W. AGC und BGC gleich seien.

Analysis.

Durch einen der gegebenen P. B fälle auf CD das Ppd. BE und verlängere ihn, bis er die AG oder ihre Verlängerung in F trifft. Da nach der Voraussetzung der W. BGE gleich AGC, so ist er auch gleich FGE; der rechte W. BEG = FEG und die Seite GE ist beiden Tr. GBE und GFE gemein; mithin sind diese Tr. congruent. Woraus hervorgeht, daß die Seite BE gleich FE ist; aber der Perpend. BE ist gegeben, folglich ist FE sowohl der Lage als der Größe nach bekannt; welches den P. F und auch den P. G bestimmt, welcher der Durchschn. von AF mit CD ist.

Synthesis.

Fället den Perpend. BE und verlängere ihn um eine

bekannte Grß. unter CD; ziehet AF, die CD in G trifft; AG und BG sind die gesuchten Linien.

Denn die Tr. GBE und GFE sind congr., weil sie einen gleichen W. BFG = FEG zwischen zwei gleichen Seiten haben, denn BE = FE und GE ist gemein, wodurch die Gleichheit der W. BGE und AGC bewiesen ist.

II. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. zu ziehen, die mit zwei der Lage nach gegebenen geraden L. gleiche Winkel macht.

Es sei A (Fig. 2) der gegebene P., und CB, GD die der Lage nach gegebenen geraden L.

Analysis.

Ziehet CH parallel zu FE und verlängert CD. Der äußere W. GCH ist gleich CFE und FCH ist seinem Wechselwinkel CEF gleich; aber der W. CFE ist gleich CEF, mithin ist GCH gleich ECH; folglich ist der W. GCE durch die gerade L. CH in zwei gleiche Theile getheilt. Da nun CH der Lage nach gegeben ist, so ist auch die Prll. EF gleichfalls bekannt.

Synthesis.

Halbirt den bekannten W. GCB durch die gerade L. CH und durch den gegebenen P. A ziehet zu dieser

L. die Prll. EF; der W. CEF ist gleich CFE. Denn diese zwei W. sind respective gleich, der eine dem innern Wechselw. ECH, der andere dem corresp. GCH; sie sind folglich einander gleich.

III. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. so zu ziehen, daß diej. Abschnitte, die zwischen den auf ihr, aus zwei gegebenen P. gefällten Prpd. liegen, einander gleich seien.

Wenn die P. A, B und C gegeben sind (Fig. 3), so verlangt man eine gerade L. FCE zu ziehen, so daß die durch die Perpd. AF und BE bestimmten Theile CF und CE einander gleich seien.

Analysis.

Verlängere AC bis zur Begegnung von BE in D. Die rechtw. Tr. AFC und DEC sind congr., denn der W. ACF ist gleich DCE und die Seite CF ist gl. CE. Es gehet hieraus hervor, daß die Seite CA gl. CD ist. Aber CA ist augenscheinlich gegeben; mithin sind CD u. D bekannt; also ist BD gegeben und eben so verhält es sich mit dem Perpd. CE.

Syntheſis.

Verl. AC um eine gleiche Grß. bis in D, ziehet BD, ziehet eine Prlle. AF zu BD und auf derſelben L. einen Perpd. CE; FCE iſt die geſuchte L. Denn da in den Tr. FAC und EDC die W. ACF, AFC reſpect. gleich DCE, DEC ſind, und die Seite AC gleich CD iſt, ſo folgt hieraus, daß ſie congr. ſind und daß CF = CE.

IV. Satz.

Aufgabe.

Einen Triangel in zwei gleiche Theile durch eine gerade Linie zu theilen, die durch einen auf einer der Seiten gegebenen P. gehet.

Es werde verlangt, durch den P. D die gerade L. DF zu ziehen, welche den Triangel ABC halbirt.

Analyſis.

Nehmet die Mitte E von AC (Fig. 4), ziehet EB, EF und BD; der Tr. ABE iſt gleich EBC und er iſt folglich die Hälfte von ABC. Alſo nach der Ausſage, muß ABE gl. AFD ſein. Wenn man von jedem dieſer Tr. den gemeinſch. Theil AFE abnimmt, ſo werden zwei gleiche Tr. EFB und EFD übrig bleiben. Weil dieſe zwei Tr. einerlei Grundl. haben, ſo müſſen ſie auch gleiche Höhe haben, d. h. EF muß prll. mit BD

sein. Aber da die P. B und D gegeben sind, so ist die gerade L. BD der Lage nach gegeben; woraus folgt, daß EF auch bekannt ist.

Synthesis.

Wenn AC in E halbirt und BD gezogen ist, so ziehet die Parallel EF zu dieser geraden L., welche AB in F trift; die L. DF theilt den Tr. in zwei gleiche Theile.

In der That, ziehet BE. Weil BD prll. FE, so ist der Tr. EFB gleich EFD, und wenn man AFE zu jedem von diesen zwei Tr. hinzusetzt, so sind die so gebildeten Tr. AFD und ABE gleich. Folglich ist der erste die Hälfte von ABC, weil der zweite es ist.

V. Satz.

Aufgabe.

Innerhalb eines Triangels einen P. zu finden, durch welchen die aus den drei Winkelspitzen gezogenen geraden L., den Tr. in drei gleiche Tr. theilen *).

*) Die analoge Aufg. in der Stereom. bestehet darin, innerhalb eines Tetraeders einen P. zu finden, so daß die Tetraeder, welche diesen P. gemeinsch. und zu Grundfl. die vier Seitenfl. des Tetraeders haben, gleich sind; dieser P. ist der Schwerpunkt des Tetraeders.

D. franz. Ueberf. M. Comte.

Es sei F (Fig. 5) der gesuchte Punkt, von welchem die L. FA, FB und FC, die den gegebenen Tr. ABC in drei gl. Theile theilen, ausgehen.

Analysis.

Ziehet FD, FE prll. zu den Seiten BA, BC und ziehet BD, BE. Da FD prll. AB, so ist der Tr. ABF gleich ABD, der also $\frac{1}{3}$ von ABC ist. Aus demselben Grunde ist der Tr. BEC, welcher gleich BFC, ebenfalls $\frac{1}{3}$ von ABC. Deshalb sind die Grdl. AD und EC jede $\frac{1}{3}$ von der Seite AC und folglich sind die Theilungsp. D und E gegeben. Es sind also die Prll. DF und EF bekannt und eben so verh. es sich mit ihrem Treffp. F.

Der P. F kann anders bestimmt werden. In der That, verlängert AF und CF bis in G nnd H. Der Tr. DFE ist augenscheinlich ähnlich ABC, woraus folgt

$$AC : AB = DE : DF.$$

Aber $AC = 3DE$, folglich $AB = 3DF$

Ueberdem, da AH und DF prll. sind, so hat man

$$AC : AH = DC : DF$$

oder, welches einerlei,

$$2AC : 2AH = 3DC : 3DF;$$

aber $2AC = 6AD = 3DC$ und $2AH = 3DF = AB$. Mithin ist der P. H die Mitte von AB und aus demselben Grunde ist G die Mitte von BC.

Wenn diese zwei P. bekannt sind, so ist der Durchschnitt F der L. CH und AG ebenfalls bestimmt.

zung betreffend, hinzugefügt, und dazu Herr L'Huilliers Elemens d'analyse géometrique etc. Paris 1809. in 4to frei benutzt.

In Fischers Anmerkungen zu seinem Lehrbuche der Mathematik. Erstes Heft. Berlin und Leipzig bei Nauk 1820. 8. findet sich Seite 151 ein sehr lesenswerther Aufsatz: Ueber die geom. Analysis der Alten von Otto Schulz. Hrn. Prof. Schulz Empfehlung, daß man wenigstens beim Schulunterrichte den Weg der Alten nicht ganz verlassen möge, verdient um so mehr beachtet zu werden, da er selbst den Methoden der Neuern, da, wo es um die Sache und nicht mehr um die formale Bildung zu thun ist, den Vorzug einräumt, und also gar kein blinder Verehrer der Alten ist.

Ich glaube daher, daß das vorliegende Werk sehr geeignet ist, sich mit den Methoden der Alten vertraut zu machen.

Berlin, am 5ten des August 1822.

Grüson.

Geome-

Geometrische Analysis.

Die Analysis *) ist die Methode, wodurch ein Satz durch eine Verkettung nothwendiger Folgerungen auf ein bekanntes Verfahren oder auf ein als wahr erkanntes Princip zurückgebracht ist.

Sie ist sowohl auf Untersuchung der Wahrheit eines Lehrsatzes als auf die Entdeckung der zur Auflösung einer Aufgabe geeigneten Construktion anwendbar. Die Analysis ist eine umgekehrte Form von Auflösung. Von der als wahr vorausgesetzten Hypothese ausgehend steigt sie Schritt vor Schritt, bis sie ein bekanntes Princip erreicht hat. Das Umgekehrte von die-

*) Griechisches Wort: Ἀνάλυσις (analūsis) abgeleitet von ἀνά (ana): auf, nach der Ordnung, theilweise und von λύω (lūō): ich löse.

ſer Methode iſt die Syntheſis, die gewöhnlich zum Vortrage der Elemente der Wiſſenſchaften angewendet wird. Die Analyſis iſt eigentlich das Inſtrument der Erfindung, da hingegen die Syntheſis ungekünſtelter der Leitung des Vortrages der Entdeckungen gewidmet iſt.

Erstes Buch.

Erklärungen.

1. In jeder Aufg. nennt man **Gegebene** diej. Größen, welche nach der bloßen Aussage der Aufgabe bestimmt sind und diejenigen, welche aus dem Vorhergehenden durch schon bekannte Hülfsmittel abgeleitet werden können.
2. Man sagt: ein **Verhältniß ist gegeben**, wenn es gleich dem Verh. von gegebenen Größen ist.
3. Die Linien, die Punkte, die Ausdehnungen in einer fixen **Lage** sind gegeben, wenn sie aus der Aussage der Aufgabe hervorgehen oder durch bereits bekannte Hülfsmittel daraus abgeleitet werden können.
4. Ein Kreis ist **der Lage und Größe nach gegeben**, wenn sein Mittelp. und sein Halbm. gegeben sind.
5. Eine geradlinige Figur heißt **der Gattung nach gegeben**, wenn sie einer gegebenen Figur ähnlich ist.

I. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene P. zwei schiefe Linien nach einer geraden Linie zu ziehen, die gegen letztere gleich geneigt sind.

Es seien A, B (Fig. 1, Taf. 1) die zwei gegebene P. und CD eine der Lage nach gegebene gerade L.; man verlangt AG und BG so zu ziehen, daß die W. AGC und BGC gleich seien.

Analysis.

Durch einen der gegebenen P. B fälle auf CD das Ppd. BE und verlängere ihn, bis er die AG oder ihre Verlängerung in F trifft. Da nach der Voraussetzung der W. BGE gleich AGC, so ist er auch gleich FGE; der rechte W. BEG = FEG und die Seite GE ist beiden Tr. GBE und GFE gemein; mithin sind diese Tr. congruent. Woraus hervorgeht, daß die Seite BE gleich FE ist; aber der Perpend. BE ist gegeben, folglich ist FE sowohl der Lage als der Größe nach bekannt; welches den P. F und auch den P. G bestimmt, welcher der Durchschn. von AF mit CD ist.

Synthesis.

Fället den Perpend. BE und verlängere ihn um eine

bekannte Grß. unter CD; ziehet AF, die CD in G trifft; AG und BG sind die gesuchten Linien.

Denn die Tr. GBE und GFE sind congr., weil sie einen gleichen W. BFG = FEG zwischen zwei gleichen Seiten haben, denn BE = FE und GE ist gemein, wodurch die Gleichheit der W. BGE und AGC bewiesen ist.

II. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. zu ziehen, die mit zwei der Lage nach gegebenen geraden L. gleiche Winkel macht.

Es sei A (Fig. 2) der gegebene P., und CB, GD die der Lage nach gegebenen geraden L.

Analysis.

Ziehet CH parallel zu FE und verlängert CD. Der äußere W. GCH ist gleich CFE und FCH ist seinem Wechselwinkel CEF gleich; aber der W. CFE ist gleich CEF, mithin ist GCH gleich ECH; folglich ist der W. GCE durch die gerade L. CH in zwei gleiche Theile getheilt. Da nun CH der Lage nach gegeben ist, so ist auch die Prll. EF gleichfalls bekannt.

Synthesis.

Halbirt den bekannten W. GCB durch die gerade L. CH und durch den gegebenen P. A ziehet zu dieser

L. die Prll. EF; der W. CEF ist gleich CFE. Denn diese zwei W. sind respective gleich, der eine dem innern Wechselw. ECH, der andere dem corresp. GCH; sie sind folglich einander gleich.

III. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. so zu ziehen, daß diej. Abschnitte, die zwischen den auf ihr, aus zwei gegebenen P. gefällten Prpd. liegen, einander gleich seien.

Wenn die P. A, B und C gegeben sind (Fig. 3), so verlangt man eine gerade L. FCE zu ziehen, so daß die durch die Perpd. AF und BE bestimmten Theile CF und CE einander gleich seien.

Analysis.

Verlängere AC bis zur Begegnung von BE in D. Die rechtw. Tr. AFC und DEC sind congr., denn der W. ACF ist gleich DCE und die Seite CF ist gl. CE. Es gehet hieraus hervor, daß die Seite CA gl. CD ist. Aber CA ist augenscheinlich gegeben; mithin sind CD u. D bekannt; also ist BD gegeben und eben so verhält es sich mit dem Perpd. CE.

Syntheſis.

Verl. AC um eine gleiche Grß. bis in D, ziehet BD, ziehet eine Prlle. AF zu BD und auf derſelben L. einen Perpd. CE; FCE iſt die geſuchte L. Denn da in den Tr. FAC und EDC die W. ACF, AFC reſpect. gleich DCE, DEC ſind, und die Seite AC gleich CD iſt, ſo folgt hieraus, daß ſie congr. ſind und daß CF = CE.

IV. Satz.

Aufgabe.

Einen Triangel in zwei gleiche Theile durch eine gerade Linie zu theilen, die durch einen auf einer der Seiten gegebenen P. gehet.

Es werde verlangt, durch den P. D die gerade L. DF zu ziehen, welche den Triangel ABC halbirt.

Analyſis.

Nehmet die Mitte E von AC (Fig. 4), ziehet EB, EF und BD; der Tr. ABE iſt gleich EBC und er iſt folglich die Hälfte von ABC. Alſo nach der Ausſage, muß ABE gl. AFD ſein. Wenn man von jedem dieſer Tr. den gemeinſch. Theil AFE abnimmt, ſo werden zwei gleiche Tr. EFB und EFD übrig bleiben. Weil dieſe zwei Tr. einerlei Grundl. haben, ſo müſſen ſie auch gleiche Höhe haben, d. h. EF muß prll. mit BD

sein. Aber da die P. B und D gegeben sind, so ist die gerade L. BD der Lage nach gegeben; woraus folgt, daß EF auch bekannt ist.

Synthesis.

Wenn AC in E halbirt und BD gezogen ist, so ziehet die Parallel EF zu dieser geraden L., welche AB in F trift; die L. DF theilt den Tr. in zwei gleiche Theile.

In der That, ziehet BE. Weil BD prll. FE, so ist der Tr. EFB gleich EFD, und wenn man AFE zu jedem von diesen zwei Tr. hinzusetzt, so sind die so gebildeten Tr. AFD und ABE gleich. Folglich ist der erste die Hälfte von ABC, weil der zweite es ist.

V. Satz.

Aufgabe.

Innerhalb eines Triangels einen P. zu finden, durch welchen die aus den drei Winkelspitzen gezogenen geraden L., den Tr. in drei gleiche Tr. theilen *).

*) Die analoge Aufg. in der Stereom. bestehet darin, innerhalb eines Tetraeders einen P. zu finden, so daß die Tetraeder, welche diesen P. gemeinsch. und zu Grundfl. die vier Seitenfl. des Tetraeders haben, gleich sind; dieser P. ist der Schwerpunkt des Tetraeders.

D. franz. Ueberf. M. Comte.

Es sei F (Fig. 5) der gesuchte Punkt, von welchem die L. FA, FB und FC, die den gegebenen Tr. ABC in drei gl. Theile theilen, ausgehen.

Analysis.

Ziehet FD, FE prll. zu den Seiten BA, BC und ziehet BD, BE. Da FD prll. AB, so ist der Tr. ABF gleich ABD, der also $\frac{1}{3}$ von ABC ist. Aus demselben Grunde ist der Tr. BEC, welcher gleich BFC, ebenfalls $\frac{1}{3}$ von ABC. Deshalb sind die Grdl. AD und EC jede $\frac{1}{3}$ von der Seite AC und folglich sind die Theilungsp. D und E gegeben. Es sind also die Prll. DF und EF bekannt und eben so verh. es sich mit ihrem Treffp. F.

Der P. F kann anders bestimmt werden. In der That, verlängert AF und CF bis in G nnd H. Der Tr. DFE ist augenscheinlich ähnlich ABC, woraus folgt

$$AC : AB = DE : DF.$$

Aber $AC = 3DE$, folglich $AB = 3DF$

Ueberdem, da AH und DF prll. sind, so hat man

$$AC : AH = DC : DF$$

oder, welches einerlei,

$$2AC : 2AH = 3DC : 3DF;$$

aber $2AC = 6AD = 3DC$ und $2AH = 3DF = AB$. Mithin ist der P. H die Mitte von AB und aus demselben Grunde ist G die Mitte von BC.

Wenn diese zwei P. bekannt sind, so ist der Durchschnitt F der L. CH und AG ebenfalls bestimmt.

Syntheſis.

Halbirt AB und BC in H und G, ziehet CH und AG und durch ihren Durchſchnittsp. ziehet FA, FB und FC, ſo werdet ihr den Tr. ABC in drei gleiche Theile theilen. In der That, fället aus den P. A und B die Perdp. AI und BL. Die Tr. HAI und HBL ſind gleich, weil W. AHI = BHL, W. AIH = BLH und die Seite AH gleich BH iſt; AI iſt alſo gleich BL. Da die Tr. AFC und BFC auf einerlei Grundl. CF ſtehen und gleiche Höhen AI und BL haben, ſo ſind ſie gleich. Durch dieſelben Schlüſſe beweiſt man, daß die Tr. AFG und AFB gleich ſind. Der Tr. ABC iſt alſo dem Flächeninhalt nach in drei gleiche Tr. getheilt, die ihren gemeinſch. Scheitel im P. F haben.

VI. Satz.

Aufgabe.

Einen Tr. durch drei aus einem innerhalb des Tr. gegebenen Punkt gezogene Linien in drei gleiche Theile zu theilen.

Es ſei ABC (Fig. 6) ein Tr., den man ſich vornimmt, in drei gleiche Flächen zu theilen durch die aus dem P. D gezogenen geraden L. DB, DG und DH.

Analysis.

Ziehet BG, ziehet zu dieser L. die Prll. DE und verbindet B und E. Der Tr. BDG ist gleich BEG und folglich das Trapez ABDG gleich dem Tr. ABE, der also $\frac{2}{3}$ von ABC ist.

Es gehet hieraus hervor, daß die Grdl. AE ein Drittel von AC ist und folglich, daß der P. E bekannt ist; die Prll. BG zu DE ist also bestimmt und gleichfalls der P. G so wie auch DG. Durch ähnl. Schlüsse ist ersichtlich, daß, wenn man BH und ihre Prll. DF, so wie DG zieht, die L. DH ebenfalls bestimmt ist.

Synthesis.

Theile die Grundl. AC in drei gleiche Theile und durch die Theilungsp. E, F ziehe DE, DF; führe zu diesen L. die Prllen. BG, BH; ziehe DB, DG, DH; sie theilen den Tr. ABC in drei gl. Theile.

Denn da DE prll. BG, so ist der Tr. BDG gleich BEG und folgl. ist das Trap. ABDG gleich dem Tr. ABE. Aus dems. Grunde ist das Trp. BDHC gl. dem Tr. BFC; mithin sind die übrig bleibenden Tr. GDH und BFE gleich. Da aber die Tr. ABE, BEF, FBC, gleiche Grundl. und ihren Scheitel gemein haben, so haben sie gleichen Inhalt; folgl. sind die Räume ABDG, GDH und BDHC, jeder gleich $\frac{1}{3}$ vom gegebenen Tr. ABC *).

*) Wie wird man verfahren, wenn BH außerhalb des Triangels fällt? Grüson.

VII. Satz.

Aufgabe.

Innerhalb eines Triangels ein Quadrat einzuschreiben.

Es sei ABC (Fig. 7) der Tr., in welchen man ein Quadrat IGFH einzuschreiben verlangt.

Analysis.

Ziehet AF und verl. diese gerade L., bis sie die zu AC gezogene Prll. BE in E trifft; fället überdem die Perpd. BD und EK.

Weil EB prll. zu AC oder zu FG ist, so hat man die Proport.

$$AF : AE = FG : EB;$$

und da überdem der Prpd. EK prll. zu FH ist, so hat man auch

$$AF : AE = FH : EK.$$

Aus diesen zwei Prop. gehet hervor, daß

$$FG : EB = FH : EK;$$

aber $FG = FH$, also $EB = EK$.

Es ist aber die L. EK bekannt, weil sie gleich der Höhe BD des gegebenen Tr. ist; mithin ist EB auch sowohl der Lage als der Größe nach bestimmt; woraus hervorgeht, daß der Punkt E bekannt ist, daß es sich eben so verh. mit dem Durchschn. von AE mit BC und

auch mit der Prll. FG und dem Prpd. FH. Das Quadrat ist also vollständig bestimmt.

Synthesis.

Ziehet durch B eine Prll. BE zu AC, und BD; nehmet BE gleich BD, ziehet AE, welche BE in F schneidet und vollendet das Rect. IGFH.

Weil BE und EK resp. prll. zu GF und FH sind, so ist AE : AF = BE : GF und

AE : AF = EK : FH; woraus hervorgeht, daß

BE : GF = EK : FH.

Aber BE ist gleich EK durch Constr.; folglich GF=FH. Es ist hierdurch einleuchtend, daß das Rect. IGFH ein Quadrat ist.

VIII. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. so zu ziehen, daß die durch zwei gegebene gerade L. bestimmten Theile jener L. unter sich in einem gegebenen Verh. stehen.

Es sei A (Fig. 8) der gegebene P. und BC, BD seien die zwei gegebenen geraden L.; man verlangt EAF so zu ziehen, daß EA zu AF wie M zu N ist.

Analysis.

Wenn Ihr durch A die gerade L. AG prll. zu BC zieht, so wird diese gerade L. der BD in einem P. G begegnen, der offenbar gegeben ist. Die L. FE, FB sind durch die Prllen. BE, GA in rationale Theile geschnitten und folglich

$$EA : AF = BG : GF.$$

Da das Verh. von EA und AF gegeben ist, so gilt dieses auch von BG zu GF. Da nun BG bekannt ist, so ist es auch GF, woraus hervorgeht, daß der P. F und die L. EAF bestimmt sind.

Synthesis.

Führt AG prll. zu BC, bestimmt GF, so daß

$$BG : GF = M : N$$

und ziehet FAE; diese gerade L. ist die gesuchte Linie. Denn da BE und AG prll sind, so hat man die Prop.

$$EA : AF = BG : GF;$$

aber $BG : GF = M : N$, folglich

$$EA : AF = M : N.$$

IX. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. zu ziehen, die durch die Peripherie eines gegebenen Kreises in einem gegebenen Verh. getheilt sei.

Es sei A (Fig. 9) der gegebene P. und BDCE der gegebene Kreis; so ist die Aufg. BC so zu ziehen, daß BA zu AC sei wie M zu N.

Analysis.

Ziehet den Durchm. DAE, die geraden L. DB, CE und führet CF prll. zu DB. Weil der P. A und der Mittelp. gegeben sind, so ist der Durchm. DE der Lage nach bekannt eben so wie seine Endp. D und E. Aber da DB prll. zu CF, so ist,

$$BA : AC = DA : AF;$$

woraus folgt, daß das Verhältniß von DA zu AF bekannt ist und da DA gegeben ist, so ist es eben so mit AF. Ueberdem zufolge einer sehr bekannten Eigenschaft des Kreises $BA \cdot AC = AD \cdot AE$, d. h.

$$AE : AC = BA : DA;$$

aber $BA : DA = AC : AF$, mithin

$$AE : AC = AC : AF.$$

Folglich erhält man AC, wenn man eine mittlere Proportionale zwischen AF und AE nimmt; also ist der P. C bekannt und folglich ist BC vollständig bestimmt.

Synthesis.

Nachdem der Durchmesser DE gezogen, so nehmet AF so, daß

$$DA : AF = M : N,$$

suchet nachgehends eine mittlere Proportionale AC zwi-

schen AF und AE und bestimmet den P. C. so, daß AC gleich dieser mittlern Proportionale sei; BAC ist die gesuchte Linie.

Um dieses zu beweisen, ziehet DB, CF und CE. Weil das Rechteck aus BA und AC gleich ist dem aus DA und AE, so folgt hieraus, daß

$$AE : AC = BA : DA;$$

aber durch Constr.

$$AE : AC = AC : AF,$$

mithin $AC : AF = BA : DA$,

woraus hervorgeht, daß

$$AC : BA = AF : DA \text{ d. h. } = M : N.$$

X. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei in der Peripherie eines Kreises gegebene Punkte, nach einem andern Punkt dieser Peripherie zwei gerade Linien zu ziehen, die zu einander in einem gegebenen Verhältniß stehen.

Man verlangt durch die Punkte A und B (Figur 10) die geraden Linien AC und BC so zu ziehen, daß sie ein gegebenes Verhältniß haben.

Ana-

Analyſis.

Ziehet CE, die den Winkel ACB halbirt. So werdet Ihr die Proportion

*) AC : CB = AD : DB haben

und folglich iſt das Verhältniß von AD zu BD gegeben, welches den P. D beſtimmt. Aber, weil der W. ACE gleich iſt BCE, ſo iſt der Bog. AE gleich dem Bog. EB; alſo erhält man den P. E, wenn man die Mitte des Bog. AEB nimmt. Da die Punkte D und E beſtimmt ſind, ſo iſt die gerade Linie EDC bekannt; dieſes iſt alſo eben ſo mit dem Punkt C und den Sehnen AC und BC.

Syntheſis.

Halbirt den Bog. AEB in E. Theilet in D die L. AB in zwei Abſchnitte, die unter einander in dem gegebenen Verh. ſtehen; ziehet die Linie DE und verlängert ſie über AB, bis ſie die Peripherie in C trifft; die Sehnen AC und BC ſind in dem gegeb. Verh. Denn, weil der Bg. AE gl. dem Bog. BE, ſo iſt der W. ACD gl. BCD und folgl. iſt das Verh. von AC zu BC daſſelbe als das von AD zu BD, d. h., es iſt gleich dem gegebenen Verhältniß.

*) Verlängere AC um CF = CB; wegen BF prll. CD hat man die Proportion AC ; CF = CB = AD ; BD.

sein. Aber da die P. B und D gegeben sind, so ist die gerade L. BD der Lage nach gegeben; woraus folgt, daß EF auch bekannt ist.

Synthesis.

Wenn AC in E halbirt und BD gezogen ist, so ziehet die Parallel EF zu dieser geraden L., welche AB in F trift; die L. DF theilt den Tr. in zwei gleiche Theile.

In der That, ziehet BE. Weil BD prll. FE, so ist der Tr. EFB gleich EFD, und wenn man AFE zu jedem von diesen zwei Tr. hinzusetzt, so sind die so gebildeten Tr. AFD und ABE gleich. Folglich ist der erste die Hälfte von ABC, weil der zweite es ist.

V. Satz.

Aufgabe.

Innerhalb eines Triangels einen P. zu finden, durch welchen die aus den drei Winkelspitzen gezogenen geraden L., den Tr. in drei gleiche Tr. theilen *).

*) Die analoge Aufg. in der Stereom. bestehet darin, innerhalb eines Tetraeders einen P. zu finden, so daß die Tetraeder, welche diesen P. gemeinsch. und zu Grundfl. die vier Seitenfl. des Tetraeders haben, gleich sind; dieser P. ist der Schwerpunkt des Tetraeders.

D. franz. Ueberf. M. Comte.

Es sei F (Fig. 5) der gesuchte Punkt, von welchem die L. FA, FB und FC, die den gegebenen Tr. ABC in drei gl. Theile theilen, ausgehen.

Analysis.

Ziehet FD, FE prll. zu den Seiten BA, BC und ziehet BD, BE. Da FD prll. AB, so ist der Tr. ABF gleich ABD, der also $\frac{1}{3}$ von ABC ist. Aus demselben Grunde ist der Tr. BEC, welcher gleich BFC, ebenfalls $\frac{1}{3}$ von ABC. Deshalb sind die Grdl. AD und EC jede $\frac{1}{3}$ von der Seite AC und folglich sind die Theilungsp. D und E gegeben. Es sind also die Prll. DF und EF bekannt und eben so verh. es sich mit ihrem Treffp. F.

Der P. F kann anders bestimmt werden. In der That, verlängert AF und CF bis in G nnd H. Der Tr. DFE ist augenscheinlich ähnlich ABC, woraus folgt

$$AC : AB = DE : DF.$$

Aber $AC = 3DE$, folglich $AB = 3DF$

Ueberdem, da AH und DF prll. sind, so hat man

$$AC : AH = DC : DF$$

oder, welches einerlei,

$$2AC : 2AH = 3DC : 3DF;$$

aber $2AC = 6AD = 3DC$ und $2AH = 3DF = AB$. Mithin ist der P. H die Mitte von AB und aus demselben Grunde ist G die Mitte von BC.

Wenn diese zwei P. bekannt sind, so ist der Durchschnitt F der L. CH und AG ebenfalls bestimmt.

Synthesis.

Halbirt AB und BC in H und G, ziehet CH und AG und durch ihren Durchschnittsp. ziehet FA, FB und FC, so werdet ihr den Tr. ABC in drei gleiche Theile theilen. In der That, fället aus den P. A und B die Perdp. AI und BL. Die Tr. HAI und HBL sind gleich, weil W. AHI = BHL, W. AIH = BLH und die Seite AH gleich BH ist; AI ist also gleich BL. Da die Tr. AFC und BFC auf einerlei Grundl. CF stehen und gleiche Höhen AI und BL haben, so sind sie gleich. Durch dieselben Schlüsse beweist man, daß die Tr. AFC und AFB gleich sind. Der Tr. ABC ist also dem Flächeninhalt nach in drei gleiche Tr. getheilt, die ihren gemeinsch. Scheitel im P. F haben.

VI. Satz.

Aufgabe.

Einen Tr. durch drei aus einem innerhalb des Tr. gegebenen Punkt gezogene Linien in drei gleiche Theile zu theilen.

Es sei ABC (Fig. 6) ein Tr., den man sich vornimmt, in drei gleiche Flächen zu theilen durch die aus dem P. D gezogenen geraden L. DB, DG und DH.

Analysis.

Ziehet BG, ziehet zu dieser L. die Prll. DE und verbindet B und E. Der Tr. BDG ist gleich BEG und folglich das Trapez ABDG gleich dem Tr. ABE, der also $\frac{1}{3}$ von ABC ist.

Es gehet hieraus hervor, daß die Grdl. AE ein Drittel von AC ist und folglich, daß der P. E bekannt ist; die Prll. BG zu DE ist also bestimmt und gleichfalls der P. G so wie auch DG. Durch ähnl. Schlüsse ist ersichtlich, daß, wenn man BH und ihre Prll. DF, so wie DG zieht, die L. DH ebenfalls bestimmt ist.

Synthesis.

Theile die Grundl. AC in drei gleiche Theile und durch die Theilungsp. E, F ziehe DE, DF; führe zu diesen L. die Prllen. BG, BH; ziehe DB, DG, DH; sie theilen den Tr. ABC in drei gl. Theile.

Denn da DE prll. BG, so ist der Tr. BDG gleich BEG und folgl. ist das Trap. ABDG gleich dem Tr. ABE. Aus dems. Grunde ist das Trp. BDHC gl. dem Tr. BFC; mithin sind die übrig bleibenden Tr. GDH und BFE gleich. Da aber die Tr. ABE, BEF, FBC, gleiche Grundl. und ihren Scheitel gemein haben, so haben sie gleichen Inhalt; folgl. sind die Räume ABDG, GDH und BDHC, jeder gleich $\frac{1}{3}$ vom gegebenen Tr. ABC *).

*) Wie wird man verfahren, wenn BH außerhalb des Triangels fällt? Grüson.

VII. Satz.

Aufgabe.

Innerhalb eines Triangels ein Quadrat einzuſchreiben.

Es ſei ABC (Fig. 7) der Tr., in welchen man ein Quadrat IGFH einzuſchreiben verlangt.

Analyſis.

Ziehet AF und verl. dieſe gerade L., bis ſie die zu AC gezogene Prll. BE in E trifft; fället überdem die Perpd. BD und EK.

Weil EB prll. zu AC oder zu FG iſt, ſo hat man die Proport.

$$AF : AE = FG : EB;$$

und da überdem der Prpd. EK prll. zu FH iſt, ſo hat man auch

$$AF : AE = FH : EK.$$

Aus dieſen zwei Prop. gehet hervor, daß

$$FG : EB = FH : EK;$$

aber $FG = FH$, alſo $EB = EK$.

Es iſt aber die L. EK bekannt, weil ſie gleich der Höhe BD des gegebenen Tr. iſt; mithin iſt EB auch ſowohl der Lage als der Größe nach beſtimmt; woraus hervorgeht, daß der Punkt E bekannt iſt, daß es ſich eben ſo verh. mit dem Durchſchn. von AE mit BC und

auch mit der Prll. FG und dem Prpd. FH. Das Quadrat ist also vollständig bestimmt.

Synthesis.

Ziehet durch B eine Prll. BE zu AC, und BD; nehmet BE gleich BD, ziehet AE, welche BE in F schneidet und vollendet das Rect. IGFH.

Weil BE und EK resp. prll. zu GF und FH sind, so ist AE : AF = BE : GF und

AE : AF = EK : FH; woraus hervorgeht, daß

BE : GF = EK : FH.

Aber BE ist gleich EK durch Constr.; folglich GF=FH. Es ist hierdurch einleuchtend, daß das Rect. IGFH ein Quadrat ist.

VIII. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. so zu ziehen, daß die durch zwei gegebene gerade L. bestimmten Theile jener L. unter sich in einem gegebenen Verh. stehen.

Es sei A (Fig. 8) der gegebene P. und BC, BD seien die zwei gegebenen geraden L.; man verlangt EAF so zu ziehen, daß EA zu AF wie M zu N ist.

Analysis.

Wenn Ihr durch A die gerade L. AG prll. zu BC zieht, so wird diese gerade L. der BD in einem P. G begegnen, der offenbar gegeben ist. Die L. FE, FB sind durch die Prllen. BE, GA in rationale Theile geschnitten und folglich

$$EA : AF = BG : GF.$$

Da das Verh. von EA und AF gegeben ist, so gilt dieses auch von BG zu GF. Da nun BG bekannt ist, so ist es auch GF, woraus hervorgeht, daß der P. F und die L. EAF bestimmt sind.

Synthesis.

Führt AG prll. zu BC, bestimmt GF, so daß

$$BG : GF = M : N$$

und ziehet FAE; diese gerade L. ist die gesuchte Linie. Denn da BE und AG prll sind, so hat man die Prop.

$$EA : AF = BG : GF;$$

aber $BG : GF = M : N$, folglich

$$EA : AF = M : N.$$

IX. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen P. eine gerade L. zu ziehen, die durch die Peripherie eines gegebenen Kreises in einem gegebenen Verh. getheilt sei.

Es sei A (Fig. 9) der gegebene P. und BDCE der gegebene Kreis; so ist die Aufg. BC so zu ziehen, daß BA zu AC sei wie M zu N.

Analysis.

Ziehet den Durchm. DAE, die geraden L. DB, CE und führet CF prll. zu DB. Weil der P. A und der Mittelp. gegeben sind, so ist der Durchm. DE der Lage nach bekannt eben so wie seine Endp. D und E. Aber da DB prll. zu CF, so ist,

$$BA : AC = DA : AF;$$

woraus folgt, daß das Verhältniß von DA zu AF bekannt ist und da DA gegeben ist, so ist es eben so mit AF. Ueberdem zufolge einer sehr bekannten Eigenschaft des Kreises $BA \cdot AC = AD \cdot AE$, d. h.

$$AE : AC = BA : DA;$$

aber $BA : DA = AC : AF$, mithin

$$AE : AC = AC : AF.$$

Folglich erhält man AC, wenn man eine mittlere Proportionale zwischen AF und AE nimmt; also ist der P. C bekannt und folglich ist BC vollständig bestimmt.

Synthesis.

Nachdem der Durchmesser DE gezogen, so nehmet AF so, daß

$$DA : AF = M : N,$$

suchet nachgehends eine mittlere Proportionale AG zwi-

schen AF und AE und bestimmet den P. C so, daß AC gleich dieser mittlern Proportionale sei; BAC ist die gesuchte Linie.

Um dieses zu beweisen, ziehet DB, CF und CE. Weil das Rechteck aus BA und AC gleich ist dem aus DA und AE, so folgt hieraus, daß

$$AE : AC = BA : DA;$$

aber durch Constr.

$$AE : AC = AC : AF,$$

mithin $AC : AF = BA : DA$,

woraus hervorgeht, daß

$$AC : BA = AF : DA \text{ d. h. } = M : N.$$

X. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei in der Peripherie eines Kreises gegebene Punkte, nach einem andern Punkt dieser Peripherie zwei gerade Linien zu ziehen, die zu einander in einem gegebenen Verhältniß stehen.

Man verlangt durch die Punkte A und B (Figur 10) die geraden Linien AC und BC so zu ziehen, daß sie ein gegebenes Verhältniß haben.

Ana-

Analyſis.

Ziehet CE, die den Winkel ACB halbirt. So werdet Ihr die Proportion

*) AC : CB = AD : DB haben

und folglich iſt das Verhältniß von AD zu BD gegeben, welches den P. D beſtimmt. Aber, weil der W. ACE gleich iſt BCE, ſo iſt der Bog. AE gleich dem Bog. EB; alſo erhält man den P. E, wenn man die Mitte des Bog. AEB nimmt. Da die Punkte D und E beſtimmt ſind, ſo iſt die gerade Linie EDC bekannt; dieſes iſt alſo eben ſo mit dem Punkt C und den Sehnen AC und BC.

Syntheſis.

Halbirt den Bog. AEB in E. Theilet in D die L. AB in zwei Abſchnitte, die unter einander in dem gegebenen Verh. ſtehen; ziehet die Linie DE und verlängert ſie über AB, bis ſie die Peripherie in C trifft; die Sehnen AC und BC ſind in dem gegeb. Verh. Denn, weil der Bg. AE gl. dem Bog. BE, ſo iſt der W. ACD gl. BCD und folgl. iſt das Verh. von AC zu BC daſſelbe als das von AD zu BD, d. h., es iſt gleich dem gegebenen Verhältniß.

*) Verlängere AC um CF = CB; wegen BF prll. CD hat man die Proportion AC : CF = CB = AD : BD.

XI. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt nach einem Kreis eine Secante zu ziehen, so daß das Rectangel aus dem äußeren Theil und dem im Kreise enthaltenen Theil einem gegebenen Flächenraum gleich sei.

Es werde verlangt, durch den P. A (Fig. 11) die gerade Linie ABC zu ziehen, so daß das Rectangel aus AB und BC gleich einem gegebenen Raum sei.

Analysis.

Durch den Mittelp. C zieht AF und suchet eine L. AE, die mit AD ein Rectangel gleich dem gegebenen Flächemraum macht. Weil AB . AC = AD . AF und durch Construktion AB . BC = AD . AE, so folgt hieraus AD : AB = AC : AF = BC : AE.

Aus dieser Prop. leitet man ab, daß

AD : AB = AC — BC, d. h.

AB : AF — AE d. h. EF.

Mithin ist AB eine mittlere Prop. zwischen AD und EF; da aber AE gegeben ist, so ist es auch EF und folglich ist AB sowohl der Größe als der Lage nach bekannt.

Synthesis.

Ziehet AF durch den Mittelp. des Kreises, nehmet AE, so daß das Rect. AD, AE gleich dem gegeb. Raum sei; suchet eine mittlere Proport. zwischen AD und EF und traget sie von A auf die Peripherie bis in B so ist das Rect. AB, BC dem gegeb. Flächenraum gleich.

Denn AD ; AB = AB ; EF und

AD ; AB = AC ; AF;

woraus hervorgeht, daß

AD:AB=AC—AB oder BC; AF—EF oder AE,

folglich ist AD, AE gleich dem Rect. AB, BC.

XII. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der die Peripherie eines gegebenen Kreises halbirt.

Es seien A und B zwei Punkte (Fig. 12), durch welche man einen Kreis ADGEB führen soll, der die Peripherie des Kreises HDFE halbirt.

Analysis.

Es seien D und E die Durchschnittsp. der beiden Kreise. Weil DFE, nach der Hypothese, ein Halbkreis ist, so ist DE ein Durchmesser, auf welchem folglich der

Mittelp. C liegen muß. Ziehet AC und verlängert sie bis in F.

Da DC gleich CE, so ist einleuchtend, daß

$$AC \cdot CG = CD^2 = HC \cdot CF;$$

aber das Rect. HC.CF ist gegeben, mithin ist es eben so mit dem Rect. AC.CG; und da AC bekannt, so ist es CG auch und der P. G ist bestimmt. Jetzt, da man die drei P. A, B und G kennt, ist es leicht, den Kreis AGB zu beschreiben.

Synthesis.

Durch den Mittelp. C des gegebenen Kr. ziehet die gerade L. ACF und nehmet auf dieser L. einen P. G, so daß

$$AC : HC = FC \text{ oder } HC : CG.$$

Leget durch die drei P. A, B u. G einen Kr. AGB; so wird er die Periph. HDFE halbiren.

In der That, durch einen der Durchschnittspunkte ziehet den Durchm. DCI und verlängert ihn, bis er den Kreis AGB in K trifft.

Weil $AC : HC = HC : CG$,

so ist das Qdr. von HC gleich dem Rect. AC.CG; aber

$$HC^2 = DC \cdot CI$$

und $$AC \cdot CG = DC \cdot CK;$$

mithin $DC \cdot CI = DC \cdot CK$, welches beweist, daß CI gleich CK, d. h., daß die P. I und K zusammen fallen und daß der Kr. AGB durch die Endp. vom Durchm. des Kr. HDFE geht.

XIII. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie in zwei Theile zu theilen, daß das über dem ersten Theil gezeichnete Quadrat gleich dem mit dem zweiten Theile und mit einer andern gegebenen Linie gebildetem Rectangel ist.

Es sei AB (Fig. 13) eine der Größe nach gegebene Linie, von welcher man einen Abschnitt AG bestimmen will, dessen Quadrat gleich dem Rectangel sei, welches aus dem Rest der Linie und der gegebenen Linie C gebildet ist.

Analysis.

Verlängere BA bis AD um eine Größe gleich C und beschreibe über DB als Durchm. einen Halbkr. und errichtet den Perpendikel AF.

Weil $AG^2 = C \cdot GB$, so folgt hieraus

$DA : AG = AG : GB$; woraus

$DA : AG = DG : AB$; folglich

$DA \cdot AB = AG \cdot DG$;

aber nach einer der Haupteigenschaften des Kreises ist

$DA \cdot AB = AF^2$,

folglich $AG \cdot DG = AF^2$.

Hieraus gehet hervor, daß AF gleich einer aus G

an den über DA als Durchm. beſchr. Halbkr. gezogene Tangente iſt. Aus der Mitte E von DA ziehet EF. Da $AG.DG = AF^2$. Wenn Ihr EA^2 zu beiden Seiten der Gleichung hinzuſetzt, ſo werdet ihr finden, daß

$AG.DG + AE^2$ d. h. EG^2 *)

gleich iſt $AF^2 + EA^2$ d. h. EF^2; mithin EG gleich EF und folglich iſt der P. G beſtimmt.

Syntheſis.

Nachdem AB um eine Grß. AD gleich C verl. und über BD ein Halbkr. beſchrieben worden, ſo errichtet den Perpd. AF; verbindet die Mitte E von AD mit F und nehmet EG gleich EF. Das Qdr. des ſo auf AB beſtimmten Abſchn. iſt gleich dem Rect. aus GD und der geg. L. C.

In der That, da der Tr. EFA rechtw. iſt, ſo iſt

$EF^2 = EA^2 + AF^2$, alſo

$AF^2 = EF^2 - EA^2 = EG^2 - EA^2$

$= (EG + EA)(EG - EA) = DG . AG.$

Aber auf der andern Seite iſt

$AF^2 = DA . AB$, mithin

$DA . AB = DG . AG$; woraus folgt, daß

$AG : AB = DA : DG.$

Aus dieſer Prop. leitet man nun ab, daß

$AB - AG$ oder $GB : AG = DG - DA$ oder $AG : DA$,

folglich $AG^2 = GB . DA = GB . C.$

*) $AG = EG - AE$; $DG = EG + AE$; $AG . DG = EG^2 - AE^2$.

Zuſ. Man kann hier bemerken, daß, wenn die gegebene L. C gleich AB iſt, alsdann $AG^2 = AB \cdot BG$ d. h. daß AB in C in äußere und mittlere Verhältniſſe getheilt iſt. Die Conſtr. fällt alsdann offenbar mit derj., die in den Elementen vorgetragen wird, zuſammen, die von der Conſtr., die uns ſo eben beſchäftiget hat, nur ein beſonderer Fall iſt.

XIV. Satz.

Aufgabe. (Fig. 14 und 14 bis).

Eine gegebene Linie in zwei Theile zu theilen, die unter ſich in ſubduplicirtem Verhältniß *) von zwei andern ebenfalls gegebenen Theilen derſelben Linien ſeien.

Es ſei vorgegeben, die gr. L. AB (Fig. 14) zu theilen, ſo daß die Segmente AD, BD in ſubduplicirtem Verhältniß der gegebenen Segmente AC, BC ſeien.

Erſter Fall. Die Summe der zwei gegeb. Segm. iſt gleich der gegeb. L.

Der den beiden Segm. gemeinſch. Theilungsp. C iſt zwiſchen A und B.

*) Zwei Größen ſind in ſubduplicirtem Verhältniß von zwei andern, wenn das Verhältniß von dieſen letztern gleich iſt dem Verh. der Qdrt. der erſtern.

Analysis.

Beschreibet über AB einen Halbkreis, errichtet den Perpendikel CE und ziehet AE, BE und ED oder ED′.

Weil AEB ein rechter W. ist, so ist das Verh. AE zu BE im subduplicirten Verhältniß von AC zu BC, und folglich ist

AE:BE=AD:BD oder AD′:BD′.

Diese Prop. zeigt (Note * S. 17), daß der W. AEB oder sein Supplement AEF durch ED oder ED′ halbirt ist. Aber der Perpendikel und der Halbkreis sind gegeben; mithin sind der Scheitel E, die gerade L. ED oder ED′ und die Theilungspunkte D und D′ gleichfalls bestimmt.

Synthesis.

Nachdem man über AB einen Halbkreis beschrieben hat, errichte man den Perpd. CE; ziehe EA, EB und halbire den W. AEB durch ED oder sein Supplement AEF durch ED′; die innern Segm. AD, DB, oder die äußern AD′, D′B sind in subduplicirtem Verh. von AC zu CB.

Denn nach der Constr. ist

AE:BE=AD:DB oder AD′:BD′.

Da aber der Tr. AEB rechtw. ist, so ist AE zu BE in subduplicirtem Verh. von AC zu BC; es ist also eben so mit dem Verh. AD:BD oder AD′:B′D.

Zweiter Fall. Die Differenz der zwei gegebenen Segm. ist gl. der gegeb. L.

Der Theilungsp. C liegt in der Verlängerung der gegebenen geraden Linie AB.

Analysis.

Beschreibe über AB (Fig. 14 bis) einen Halbkreis, ziehe die Tangente CE und AE, BE und ED oder ED′. Die Tr. ACE und ECB sind ähnlich, denn sie haben einen gemeinsch. W. ECB und überdem sind die W. CEA, CBE gleich, weil beide den halben Bg. AE zum Maaße haben; es folgt hieraus, daß

$$AC : CE = CE : BC.$$

Weil nun CE eine Tg. ist, so $CE^2 = CB.CA$, mithin

$$AC^2 : CE^2 = AC : BC.$$

Wenn man diese Prop. mit der vorh. verbindet, so geht offenbar hervor, daß CE zu BC in subdupl. Verhältniß von AC zu BC ist oder $CE^2 : BC^2 = AC : BC$.

Aber in denselben ähnl. Tr. ist

$$AE : BE = CE : BC;$$

mithin $AE : BE = \sqrt{AC} : \sqrt{BC} = AD : BD$

oder $= AD' : BD'$; folglich ist der W. AEB halbirt durch ED (Note * Seite 17) oder sein Supplem. AEF ist es durch ED′.

Synthesis.

Beschreibe über AB einen Halbkr., führet an ihm die Tang. CE und ziehet AE, BE; halbirt nachgehends den W. AEB oder sein Supp. durch ED oder ED′; die innern Segm. AD, BD oder die äußern Segm. AD′,

BD′ sind in subduplicirtem Verh. von dem Verh. AC zu BC.

Wirklich, da der W. CEA gleich CBE und W. BCE den beiden Tr. ACE und BCE gemein ist, so sind diese zwei Tr. ähnlich und

$$AC : CE = CE : BC;$$

mithin ist das Verh. von CE zu BC in subduplicirtem Verh. von AC zu BC. Ueberdem durch die Aehnlichkeit der nämlichen Tr. ist $AE : BE = CE : BC$ und folglich ist AE zu BE in subdupl. Verh. von AC zu BC.

Aber $AE : BE = AD : BD$ oder $AD′ : BD′$ mithin ist das Verh. von AD zu BD oder von $AD′ : BD′$, ein subduplicirtes Verh. von AC zu BC.

Zus. In diesem zweiten Falle, wo der W. CDE gl. der Summe der beiden W. DEB, DBE oder, welches einerlei, gl. der Summe der W. DEA, AEG, so folgt hieraus, daß der W. CDE gleich ist dem W. CED, und daß der Tr. CDE gleichschenklig ist. Ueberdem, der Hypothese zufolge, $D′EF = D′EA = D′EC + AEC$; aber anderseits $D′EF = CD′E + D′BE = CD′E + AEC$. Vergleicht man diese Resultate, so ist klar, daß die W. CD′E und D′EC gleich sind und daß der Tr. D′CE auch gleichschenklig ist. Folglich $CE = CD = CD′$; also ohne den W. AEB oder AEF zu halbiren, kann man den P. D oder D′ mittelst der Tang. CE finden, die eine mittlere Proportionale zwischen den Segm. AC, BC ist

XV. Satz.

Aufgabe.

Auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt zu finden, so daß, wenn man durch diesen Punkt unter einer gegebenen Neigung eine gerade Linie bis an die Peripherie zieht, das Quadrat von dieser Linie zu dem Rectangel aus den beiden Segmenten des Durchmessers in einem gegebenen Verhältnisse stehe.

Es sei (Fig. 15) DE zu ziehen, die mit DB einen gegebenen Winkel macht, so daß das Quadrat von DE mit dem Rectangel AD, BD ein gegebenes Verhätniß habe.

Analysis

Nehmet EG=FD, ziehet CF; den Halbm. CGH und AH und verlängert diese letztere bis zur Begegnung von CE in I.

Da CE gleich ist CF, so ist der W. CEF gleich CFE. Aus der Gleichheit dieser zwei W. und aus der respect. Gleichheit der Seiten CE, ED geht hervor, daß die Tr. CDF und CGE gleich sind und folglich, daß der W. ECG gleich ist dem W. FCD; mithin ist der Bog. HE gleich Bog. AF, und folglich ist AH prll. DE.

Da der W. BDE gegeben ist, so ist es auch der W. BAH, und die Sehne AH ist bekannt.

Da überdem das Rect. AD . DB gleich dem Rect. FD.DE ist, so ist es ebenfalls gl. dem Rect. DE.EG; deshalb ist DE^2 zu DE . EG oder DE zu EG in dem gegebenen Verh.; aber DE : EG = AI : IH mithin ist AI zu IH in einem bekannten Verh. und eben so ist es mit AH zu HL.

Weil AH gegeben ist, so ist es IH auch und folglich sind der Punkt I und IC, der Punkt E und DE bestimmt.

Synthesis.

Ziehet AH geneigt gegen AB um eine Grß. gleich dem gegebenen W., verl. diese gerade L. um eine Grß. AI, die mit IH in dem gegebenen Verh. sei; ziehet IC und führet ED prll. zu IA, so ist D der gesuchte P.

Denn, weil AI : IH = DE : EG,

so ist DE zu EG in dem gegebenen Verh. und folglich ist DE^2 zu DE.EG in dem nämlichen Verh. Da aber FE prll. zu AH ist, so ist der Bg. HE gleich dem Bg. AF; der W. HCE ist also gleich dem W. ACF; mithin sind die Tr. GCE und CDF congr., weil die Seite CE gleich CF ist und die W. ECG und CEG resp. gleich den W. FCD und CFD sind; daher GE = FD und folglich DE.EG = DE.FD = AD.DB, mithin ist DE^2 zu AD.DB in dem gegebenen Verh.

XVI. Satz.

Aufgabe. (Fig. 16 u. 16 bis).

Durch zwei gegebene Punkte nach einem Punkt der Peripherie eines gegebenen Kreises zwei gerade Linien so zu ziehen, daß die Sehne des zwischen ihnen enthaltenen Bogens parallel mit der die beiden gegebenen Punkte verbindenden Linie sei.

Durch die Punkte A, B verlangt man zwei gerade Linien AC, BC zu ziehen, welche die gegebene Peripherie in D und E schneiden, so daß DE parallel zu AB sei.

Analysis.

Ziehet die Tang. DF, welche AB in F trift. Der W. FDE ist gleich dem W. ECD (Fig. 16) oder seinem Supplement (Fig. 16 bis); da aber DE prll. AB ist, so ist der W. FDE oder sein Suppl. gleich dem W. AFD, welcher also gleich ist dem W. ECD oder ACB. Hieraus folgt, daß die Tr. (Fig. 16) AFD und ABC, die außerdem einen W. CAB gemein haben, ähnlich sind und daß

$$AD : AF = AB : AC, \text{ woraus}$$
$$AD \cdot AC = AF \cdot AB.$$

Da nun der P. A und der Kr. DCE gegeben sind,

so ist also auch das Rect. AD.AC bekannt; denn es ist gleich dem Qdr. der Tang. AG, wenn der P. außerhalb des Kreises ist, und gleich dem Qdr. des Perpend. AG (Fig. 16 bis) auf dem Diameter, wenn der P. A innerhalb des Kr. ist. Also ist das Rect. AF.AB bestimmt; und da AB gegeben ist, so wird es leicht sein, daraus AF abzuleiten und folglich auch die Lage des P. F. Man wird also die Lage der Tang. FD und die vom P. D haben. Wenn man diesen P. mit dem gegebenen P. A verbindet, so werden die L. AC und nachgehends BC so wie ihr Durchschnittspunkt E mit der Peripherie bestimmt sein.

Synthesis.

Wenn der P. A (Fig. 16) außerhalb des Kreises ist, so ziehet die Tangente AG oder, wenn er innerhalb ist, (Fig. 16 bis), so errichtet den Perpend. AG auf dem durch A gehenden Durchmesser.

Suchet eine dritte Proportionale zu AG, AB und traget solche von A in F; durch den P. F ziehet die Tang. FD, ziehet AD und verl. sie bis zur Peripherie in C; ziehet CB, die den Kreis in E schneidet; so ist DE prll. zu AB.

Wirklich, weil $AB:AG=AG:AF$,

so ist $AG^2=AB.AF$; aber andererseits

$AG^2=CA.AD$,

mithin $AB.AF=CA.AD$

und folglich $AB:AC=AD:AF$.

Es folgt hieraus, daß die Tr. BAC und DAF ähn-

lich ſind, weil ſie einen gemeinſch. W. zwiſchen zwei proportionalen Seiten haben; daher iſt der W. ACB gl. AFD; aber ACB oder DCE iſt gleich EDF oder ſeinem Supplement, folglich iſt der W. AFD gleich EDF und die Sehne DE iſt prll. AB.

XVII. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte nach einem Punkt der Peripherie eines Kreiſes zwei gerade Linien zu ziehen, ſo daß die Sehne des da zwiſchen liegenden Bogens in einem gegebenen Punkt die Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte trift.

Es wird verlangt, durch die Punkte A und B (Fig. 17) die gerade Linien AF und BF zu ziehen, ſo daß die Sehne DG verlängert die Verlängerung von AB in C trift.

Analyſis.

Ziehet DE prll. zu AC, ziehet EG und verl. ſie, bis ſie AB in H trift. Der W. BHG iſt ſeinem Wechſelwinkel GED gleich, der gleich GFD iſt, weil er in demſelben Segm. eingeſchr. iſt; daher die W. BHG, BFA gleich und die Tr. BHC, BFA ähnlich ſind.

Alſo BG : BH = BA : BF und

BG . BF = BH . BA;

aber das Rect. BG.BF ist bekannt, weil es gleich dem Qdr. der aus B gezogenen Tang. ist; mithin ist BH.BA bestimmt und folgl. ist es der P. H auch. Die Aufg. ist also jetzt auf die vorherg. zurückgebracht, denn es reicht hin, durch C und H die L. CD und HE so zu ziehen, daß die Sehne DE des umspannten Bogens prll. zu HC sei.

Synthesis.

Durch den P. B ziehet an den Kreis eine Tang. BI, nehmet BH, so daß

$$BA : BI = BI : BH$$

und nach dem letzten Satz ziehet HE und CD, so daß DE parallel zu HC sei; alsdann, wenn Ihr BG bis F an die Peripherie verlängert, so bildet ADF eine gr. L.

Denn, weil BA : BI = BI : BH, so ist das Rect. BA.BH gleich dem Qdrt. von BI oder gleich dem Rect. BG.BF; mithin

$$BA : BF = BG : BH.$$

Die Tr. BAF und BGH sind ähnlich; folglich Winkel $BFA = BHG = GED = CFD$. Da die W. BFA und GFD gleich sind, so ist klar, daß die L. FA und FD eine in der Verlängerung der andern liegt.

XVIII. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte in der Peripherie eines Kreises zu einem andern Punkt in dem

dem entgegengeſetzten Theile der Peripherie gerade Linien zu ziehen, die einen gegebenen Durchm. in zwei gleich weit vom Mittelpunkt liegenden Punkte ſchneiden.

Es ſei vorgelegt, durch die Punkte A und B (Fig. 18) die gerade Linien zu ziehen, ſo daß die P. F und G, die ſie auf dem Durchm. DE beſtimmen, gleich weit vom Mittelpunkte O entfernt liegen.

Analyſis.

Ziehet BA, verl. ſie ſo wie den Durchm. ED, bis ſie ſich in M treffen, ziehet COL, fället aus dem Mittelpunkte O auf AB den Perpd. OK, verbindet K mit L, durch A ziehet AHI prll. zu DE und ziehet HK.

Die Prll. FG und AI ſind durch CA, CH und CI in proportionale Theile geſchnitten; und weil FO gleich iſt OG, ſo muß AH gleich HI ſein.

Da überdem, durch Conſtr., der P. K die Mitte von AB iſt, ſo iſt HK prll. zu IB und der W. AKH iſt gleich ABI. Nun iſt aber der W. ABI oder ABC gleich ALC, mithin iſt der W. AKH gleich ALH oder ALC; bemerkt man überdies noch, daß die W. ALH u. AKH auf einerlei Grundl. AH ruhen, ſo iſt klar, daß wegen ihrer Gleichheit das Viereck AKLH in einem Kr. einzuſchreiben ſein muß, und daß folglich die W. HAK und HLK gleich ſeien. Aber W. HAK=OMK, weil

AI und DE prll. sind; mithin ist der W. OMK gleich HLK oder OLK; das Vierseit MOKL ist also ebenfalls einschreibbar in einem Kr. und es folgt daraus, daß der W. MLO gleich ist MKO. Es ist aber MKO ein rechter W., folglich ist ML eine Tang. Diese Tang. ist eine gegebene, weil man den P. M kennt, in welchem ED u. BA zusammenlaufen; man kann also den Durchmesser LC und den P. C bestimmen.

Synthesis.

Verl. ED und BA bis zu ihrem Treffpunkt in M, ziehet die Tang. ML und den Durchmesser LC; so sind die gr. L. AC, BC so beschaffen, daß ihre Durchschnittsp. mit dem Durchm. DE von dem Mittelp. O um die gl. Grß. OF und OG entfernt liegen.

Um dieses zu beweisen, führet AI prll. zu DE, OK perpendikular auf AB und ziehet LK und KH.

Weil ML eine Tang. ist, so ist der W. OLM ein rechter, er ist also gleich MKO; folglich ist der W. MKL gleich MOL und überdem gleich AHL.

Hieraus gehet hervor, daß das Vierseit AHKL einschreibbar in einem Kr. ist und folglich ist der W. ALH gleich AKH; aber aus demselben Grunde ist der W. ALH oder ALC gleich ABC oder ABI; mithin Winkel AKH = ABI und KH ist prll. zu BI. Weil jetzt AK gleich KB, so folgt hieraus, daß AH gleich HI und daß FO gleich OG ist.

XIX. Satz.

Aufgabe. (Fig. 19 und 19 bis).

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß das Rectangel aus den auf dieser Linie zwischen zwei gegebenen Linien enthaltenen Rectangeln gleich einem gegebenen Flächenraum sei.

Es seien AB, AC (Fig. 19 und 19 bis), zwei gegebene gerade Linien und D ein Punkt, durch welchen man EF so ziehen muß, daß das Retangel aus den Segmenten ED, DF einem gegebenen Flächenraum gleich ist.

Analysis.

Ziehet AD und ziehet durch F eine gerade L. FG, welche mit EF einen W. gleich DAE macht; sie trift AD oder ihre Verl. in G. Da die Tr. ADE u. FDG offenbar ähnlich sind, so ist

AD : ED = DF : DG und folglich

AD . DG = ED . DF.

Da das Rect. ED. DF gegeben ist, so ist es auch das Rect. AD . DG und weil AD bekannt ist, so können DG und der P. G bestimmt werden. Ueberdem, weil der W. DFG gleich ist dem bekannten W. DAC, wenn man über DG ein dem W. DAC fähiges Segment be-

schreibt, so müßte F sich auf dem Bg. dieses Segm. befinden; der Durchschn. dieses Bog. mit der L. AB wird also die Lage des P. F kennen lehren; und je nachdem wirklicher Durchschn. oder nur Berührung Statt findet, wird die Aufg. zwei Aufl. oder eine einzige haben.

Synthesis.

Ziehet AD, nehmet DG so, daß das Rect. AD.DG gleich dem gegebenen Raume sei und beschr. über DG einen des W. DAC fähigen Kreisbogen; dieser Bog. schneidet AB in F, F′; EDF oder E′DF′ ist die gesuchte gerade Linie.

Denn nach der Constr. sind die Tr. ADE u. FDG ähnlich und folglich

$$AD : ED = FD : DG;$$

also $ED \cdot DF = AD \cdot DG$

gleich dem gegebenen Raume.

Wenn der Kr. die gerade L. AB berührt, so fallen die P. F und F′ zusammen und die Aufg. hat nur eine Aufl. Da in diesem Falle der W. AFD oder BFD gleich DGF, so ist er folglich gl. W. AED und der Tr. AFE ist gleichschenklig, folglich AF=AE.

XX. Satz.

Aufgabe. (Fig. 20 u. 20 bis).

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei gegebenen geraden

Linien zwei Segmente bestimmt, deren Summe gleich einer gegebenen Länge sei.

Es seien AB, AC (Fig. 20 und 20 bis) gegebene gerade Linien, und D auch ein gegebener Punkt, durch welchen man eine Linie EF legen muß, so daß die Summe der Segmente AE und AF gleich ON sei.

Die Aufg. liefert zwei Fälle, den, in welchem der P. D in dem durch die gegeb. gr. L. gebildeten spitzen W. ist, und den, wo er außerhalb dieses W. liegt.

Erster Fall. Der Punkt D (Fig. 20) liegt in dem Winkel BAC.

Analysis.

Ziehet DG und DH respect. perl. zu AB und AC.

Weil der P. D und AB, AC der Lage nach gegeb. sind, so ist das Prllgrm. AGDH bestimmt. Ueberdem, wegen der offenbaren Aehnlichkeit der Tr. EDG und DFH ist

$$EG : GD = DH : HF, \text{ und folglich}$$
$$EG \cdot HF = GD \cdot DH.$$

Aber GD und DH sind gegeben, also auch EG . HF.

Machet jetzt FK = EG u. das Rect. HF . FK ist bekannt. Da nun HK gegeb. ist, weil sie gl. HF + FK ist d. h. gleich dem Ueberschuß von AF + AE über GD + DH; so sind die Segmente HF, FK bestimmt

und da der P. H gegeben ist, so sind der P. F oder F′ und die gesuchte gr. L. EDF oder E′DF′ bekannt.

Synthesis.

Ziehet die Prllen. DG und DH zu AB und AC.

Auf die gegebene L. ON als Summe der beiden Segm. AE und AF traget OP = AG + AH und machet HK = PN. Ueber HK als Durchm. beschreibet einen Halbkr.; ziehet an diesen Halbkreis die Tang. HI und KL respect. gleich AH und AG, ziehet IL, und errichtet perpd. auf sie, in dem P. wo sie den Kreis trift, die L. MF oder M′F′, so ist EDF oder E′DF′ die verlangte gerade Linie.

Denn HI . KL = HF . FK *) und folglich

AH . AG = HF . FK.

Aber durch die Aehnlichkeit der Tr. EGD und DHF,

EG : GD oder AH = DH oder AG : HF,

mithin AH . AG = HF . EG.

Vergleicht man diese Gleichung mit der vorherg., so ist einleuchtend, daß KF = EG. Weil also AG + AH = OP u. daß HF + EG = HK = PN, so folgt hieraus, daß AG + EG + AH + HF oder AE + AF = ON.

*) Wegen der Aehnlichkeit der Tr. HIM, FKM hat man die Proport.

HI : HM = FK : KM.

Vergleicht man die zwei Tr. FHM, KLM, so hat man HM : HF = KM : KL. Aus diesen zwei Prp. zieht man

HI . KL = HF . FK.

Zweiter Fall. Der Punkt D liegt außerhalb des Winkels BAC.

Analysis.

Ziehet DG (Fig. 20 bis) perl. zu AB und DH perl. zu AC, die AB verl. in H trift. Da die Tr. EDG und DHF ähnlich sind, so ist

$$EG : DG = DH : HF, \text{ woraus}$$
$$EG \cdot HF = DG \cdot DH.$$

Da DG und DH beide gegeben sind, so ist klar, daß das Rect. EG . HF bekannt ist. Wenn Ihr jetzt FK = EG nehmet, so findet sich HK gleich $HF - EG = DG + AF - (DH - AE) = AF + AE - (DH - DG)$. Hieraus geht hervor, daß HK und das Rect. HF . FK bekannt sind und daß folglich der P. F bestimmt ist.

Wenn DF′E′ die gr. L. AB u. AC auf der andern S. des Scheitels A schneidet, so wird die Aufg. eben so gelöst. Da die Aehnlichk. der Tr. E′DG und DF′H noch bestehet, so ist $E'G : DG = DH : HF'$, mithin ist E′G . HF′ bekannt, weil es gl. DG . DH ist.

Nimmt man $F'K' = E'G$, so leuchtet ein, daß

$$HK' = E'G - HF' = AE' + DH - (DG - AF')$$
$$= AF' + AE' + (DH - DG).$$

Es ist daher die gr. L. HK′ und das Rect HF′ . F′K′ bekannt und eben so ist es auch mit dem P. F′.

Synthesis.

Nehmet OP oder OP′ gleich der Differenz der Perl. DH und DG, traget auf beiden Seiten des P. H zwei

Entfernungen HK=PN und HK′=P′N; über HK und über HK′ beschr. zwei Halbkr., errichtet in H den Prpd. HI gleich DG und in K und K′ die KL, K′L′, jeden gleich DH; ziehet IL und IL′ und in den P. M und M′, wo sie die Periph. schneiden, errichtet auf ihnen rechtwinklig MF und M′F′, so werden die geraden L. DEF und DE′F′ auf AB und AC die zwei Segm. abschneiden, die vereiniget gleich ON sein werden.

Denn HF.FK=HI.KL=DG.DH=HF.EG;
mithin EG = FK. Also HK = HF − EG
= AF + AE − (DH − DG);
u. weil HK = PN = ON − (DH − DG),
so folgt hieraus, daß AF + AE = ON.

Schließt man eben so, so ist einleuchtend, daß
E′G = F′K′ und daß folglich HK′ = E′G − HF′ =
AF′ + AE′ + (DH − DG).
Aber HK′ = P′N′ = ON + (DH − DG),
folglich AF′ + AE′ = ON.

XXI. Satz.

Aufgabe.

Aus einer der Winkelspitzen eines Quadrats eine gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen den zwei entgegengesetzten Seiten des Quadrats enthaltene Theil gleich einer gegebenen Linie sei.

Es sei ABCD (Fig. 21) ein Quadrat; durch

die Winkelspitze A muß eine gerade Linie AEF so gezogen werden, daß der Theil EF zwischen den Seiten CD und BC oder ihre Verlängerung von einer gegebenen Länge sei.

Analysis.

Ziehet FG perpendikular zu AF und durch den P. G, wo diese L. AD trift, errichtet; auf BC verlängert den Perpd. GH; ziehet überdem EG.

Der W. EFH ist gleich FEC+ECF; da er auch gleich EFG+GFH ist, so ist einleuchtend, daß, da die W. ECF nnd EFG beide rechte sind, die W. CFF und GFH gleich sind; die Tr. AED und FGH sind also congr., weil alle ihre respect. W. gl. sind und die S. AD gleich HG ist. Hieraus folgt, daß die Seite AE gl. FG ist.

Aber da die Tr. EFG und FDG rechtw. sind, so ist $FF^2+FG^2=EG^2=ED^2+DG^2$ oder, welches einerlei, $EF^2+AE^2=ED^2+DG^2$; aber

$AE^2=AD^2+ED^2$; folglich

$EF^2+AD^2+DE^2=ED^2+DG^2$, woraus

$EF^2+AD^2=DG^2$.

Aus diesem letzten Ergebniß ist klar, daß DG und folglich AG bekannt sind, weil EF und AD gegeben sind. Da der rechte W. AFG seinen Scheitel in der halben Peripherie haben muß, deren Durchm. AG, so ist dieser Scheitel F oder F' durch den Durchschn. dieses Kreises mit BH bestimmt, also die gerade L. AEF bekannt.

Synthesis.

Nehmet AI gleich der gegebenen L., ziehet DI und verl. AD bis G um DI. Ueber AG beschr. einen Halbkr. und durch den Durchschnittsp. F oder F′ mit BC ziehet die gerade L. AEF oder AE′F′; der äußere Theil EF dieser L. ist gleich AI.

Um zu erweisen, ziehet FG, EG und ziehet auf BF den Perpd. GH. Es ist einleuchtend, daß $EF^2 + FG^2 = ED^2 + DG^2$; und weil FG gleich AE ist, so ist $EF^2 + AE^2 = ED^2 + DG^2$,

Aber $AE^2 = AD^2 + ED^2$ u. $DG^2 = DI^2 = AD^2 + AI^2$;

mith. $EF^2 + AD^2 + ED^2 = ED^2 + AD^2 + AI^2$ u. folgl. EF = AI.

XXII. Satz.

Aufgabe.

Wenn die Grundlinie AC (Fig. 22) eines Triangels, die Höhe BD und das Rectangel aus den beiden andern Seiten gegeben ist, den Triangel zu construiren.

Analysis.

Durch die drei Winkelspitzen des Tr. ABC leget einen Kr. und ziehet den Durchm. BF so wie auch die Halbm. AE und CE.

Da wegen der ähnl. Tr. ABD, BFC das Rect. AC.BC gleich BD.BF, so ist dieses zweite Rect. ebenfalls bekannt; und weil die Höhe BD gegeben ist, so

sind der Durchm. BF und demnach auch die Halbm. AE, CE gegeb. Aber da die Grdl. AC gegeb. ist, so sind die drei Seiten des Tr. AEC bestimmt und eben so verh. es sich folglich auch mit dem Mittelp. E und dem Kr. ABCF. Ueberdem da die Entfernung des Scheitels B von der Grdl. gegeben ist, so ist klar, daß dieser Scheitel auf einer in dieser Entfernung zu AC gezogenen Prll. liegen muß. Der P. B ist also durch den Durchschn. dieser Prll. mit der Peripherie ABCF bekannt.

Synthesis.

Ueber BD beschreibe ein Rect. gleich dem gegebenen Rect. BF.BD; bildet über AC den Tr. AEC, welcher die Seite AE und CE jede gleich der Hälfte der grossen Seite dieses Rect. hat. Aus E mit dem Halbmesser EA beschr. einen Kreis; errichte über AC einen Perpd. DB gleich der Höhe des Tr. und durch B ziehet zu AC eine Prll., welche die Periph. in B oder B′ trift, so ist ABC der verlangte Tr.

Denn zuerst ist seine Höhe offenbar gleich der gegeb. Höhe und da außerdem das Rect. AB.BC = BF.BD, so ist es auch gleich dem gegebenen Rect.

XXIII. Satz.

Aufgabe.

Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Triangels und die Differenz oder die Summe der

beiden andern Seiten gegeben ſind, dieſen Triangel zu conſtruiren.

Analyſis.

Auf die Grdl. AB (Fig. 23) oder auf ihre Verlängerung traget BD oder BE gleich dem Perpend. BC; ziehet CD oder CE.

Die Tr. CBD und CBE ſind rechtwinkl. und gleichſchenklig und folglich ſind die W. D und E einander gleich, jeder einem halben rechten.

Da die Summe AD den beiden Seiten AB u. BC gegeben iſt, ſo ſind der P. D und folglich CD bekannt, weil überdem dieſe mit DA einen gegebenen W. macht; oder auch, wenn es die gegebene Diff. der beiden Seiten iſt, ſo iſt alsdann der Punkt E beſtimmt und EC iſt der Lage und Größe nach bekannt. In dem einen oder in dem andern Fall, weil die Hypotenuſe AC gegeben iſt, ſo muß ſich der P. C auf dem Kreisbogen des aus A mit AC beſchr. Kreiſes befinden; dieſer P. wird alſo durch den Durchſchn. dieſes Kreiſes und der geraden L. CD oder CE beſtimmt ſein.

Syntheſis.

Nehmet AD oder AE gleich der Summe oder der Diff. von AB und BC, ziehet DC oder EC, welche mit AD einen halben rechten W. machen; aus A beſchreibet mit AC als Halbm. einen Kr., welcher DC oder EC in C ſchneidet, und aus dieſem P. fället den Perpendikel CB; der Tr. ABC genügt den Beding. der Aufgabe.

Denn, die rechtw. Tr. CBD u. CBE sind offenbar gleichschenklig und folglich AD gleich der Summe und AE gleich der Differ. der Seiten AB, BC.

XXIV. Satz.

Aufgabe.

Die Construktion eines regulären Fünfseits oder Zehnseits zu finden.

1. Jedes regul. Polyg. kann im Kr. beschr. werden und folglich sind die um den Mittelp. durch die nach den versch. Winkelspitzen der Fig. gezogenen Halbm. gebildeten W., jeder gl. bemj. Theil von vier Rechten, der durch die Anzahl der Seiten des Polygons angegeben ist; daher ist der Mittelpw. eines Fünfseits $= \frac{4}{5}$ Rechten.

Da aber ein W., dessen Scheitel in der Periph. ist, die Hälfte von dem Mittelpw. ist, dessen Seiten diese Periph. in dem nämlichen P. schneiden, so ist klar, daß der W. an der Spitze des im Fünfseit durch die von einem der W. des Polygons nach den Endp. der gegenüber liegenden Seiten gezogenen L. gebildeten gleichsch. Tr. $= \frac{2}{10}$ Rechten sein muß. Wäre nun dieser Tr. bekannt, so wäre die Aufg. gelöst, weil man den W. am Mittelpunkte des Fünfseits kennen würde; die Aufg. von Einschreibung des Fünfseits ist also zurückgeführt auf die, einen gleichschenkligen Tr. zu construiren, von welchem der W. an der Spitze gleich $\frac{2}{10}$ Rechten oder $\frac{1}{5}$ Rechten ist.

2. Es folgt hieraus, daß die W. an der Grdl. die gleichsch. Tr., beide vereint, dem Rest von 2 Recht gl. sein müssen, d. h. daß jeder von ihnen $= \frac{2}{3}$. 2 Re ten. Der gesuchte Tr. hat also die Eigensch., d jeder von den W. an der Grundl. doppelt so gr als der W. an der Spitze ist.

3. Dieses angenommen, sei ABC (Fig. 24) ein gleichschenkliger Tr., welcher die W. A und C doppelt groß hat als Winkel B. Ziehet CD, welche den W ACB halbirt. Der W. BCD muß alsdann gl. CB und folglich die Seite CD gleich BD sein. Aber den Tr. BAC und CAD ist der W. ABC gl. ACI W. CAB ist gemein, mithin sind die übrig bleibend W. BCA und CDA gl.; also W. CDA gl. CA und die Seite AC ist gleich CD.

Die drei gr. L. AC, CD und BD sind also Ueberdem, weil CD den W. ACD halbirt,

$$BC : AC = AC : AD \text{ oder auch}$$
$$AB : BD = BD : AD.$$

Daher ist AB in D in mittlere und äußere Ver getheilt, d. h. daß das Qdr. von BD oder AC, Grd des gleichsch. Tr., gleich ist dem Rect. aus der Sei AB und dem übrig gebliebenen Segm- AD. Es durch dieses Ergebniß einleuchtend, daß die Schwi rigkeit der primitiven Aufg. reducirt ist auf die, ei L. in mittlere und äußere Verh. zu theilen.

4. Es sei jetzt aufgegeben, eine gr. L. AB (Fig. 24 bis in mittlere und äußere Verh. zu theilen, d. h. so da

$BC^2 = BA \cdot AC$. Setzt zu beiden Seiten dieser Gleichung das Rect. $BA \cdot BC$ hinzu, so ist

$$BC^2 + BA \cdot BC = BA \cdot AC + BA \cdot BC \text{ oder auch}$$
$$BC(BA + BC) = BA^2.$$

Verl. AB um eine Grß. gleich B bis D, so ist einleuchtend, daß $BC \cdot BD = BD^2$. Nehmet die Mitte von BD in E; CD u. BC sind die Summe und die Diff. von CE und BE; daher ist das Rect. $CD \cdot BC$ oder das Qdrt. von BA gleich dem Uebermaaß vom Qdrt. von CE über das Qdrt. von BE;

$$\text{also } CE^2 = BA^2 + BE^2.$$

Errichtet den Perpend. $BF = BA$ und ziehet EF. Es ist einleuchtend, daß $EF^2 = BA^2 + BE^2$ und folgl. $EF = CE$; da EF gegeben ist, so sind es auch CE und BC.

Die Aufl. dieser Aufg. erinnert an eine Reihe der interessantesten Sätze aus der Elementar-Geometrie *).

*) Man kann auch noch hinzusetzen, daß diese Aufl. recht geeignet ist, einen genauen und deutlichen Begriff von dem Charakter zu geben, welcher die analytischen Aufl. auszeichnet. Man hat zuerst gesehen, daß die Aufg, den Mittelpw. des Fünfseits zu finden, sich auf die Constr. eines gleichsch. Tr. reducirte, dessen W. an der Grdl. doppelt so groß als die W. am Scheitel sind; nachgehends durch eine Kette von Schlüssen wurde die Aufsuchung dieses Tr auf die Theilung einer L. in mittlere und äußere Verhältnisse gebracht. Endlich wurde diese letzte Aufg. aufgelöst, indem man immer denselben Weg verfolgte, nämlich beständig vom Zusammengesetzten zum Einfachen über zu gehen. Die Aufg. als aufgelöst angenommen, so untersucht man, welches

XXV. Satz.

Aufgabe.

Die nöthigen Bedingungen zur Trisection des Winkels zu finden.

Es sei ABC (Fig. 25) ein Winkel, davon ABD ein Drittheil ist.

Aus dem Scheitel B als Mittelpunkt und mit einem willkührlichen Halbmesser beschreibet einen Kreis, ziehet DF parallel zu AB, verbindet den Punkt F mit C und verlängert CF, bis sie AB in G trifft.

Ana-

die Relationen sind, welche diese Annahme zwischen den gegebenen und den unbekannten Grß. aufstellt, und diese Rel. verbindet man, indem man sich beständig bemüht, sie mehr und mehr zu vereinfachen, bis man endlich zu einer genugsamen einfachen Rel. gekommen ist, um daraus den Werth der gesuchten Grß. durch bereits bekannte Mittel ableiten zu können.

Dieses ist der Geist der analytischen Methode, den man sorgfältig von den Formeln und dem mathematischen Kalkül zu unterscheiden hat, obgleich in dergleichen Untersuchungen die Analysis fast ausschließlich angewandt wird. Aber die Analysis ist nicht blos anwendbar auf Untersuchungen in Bezug auf Grß. und Dauer; sie ist auch das beste Mittel, zur Wahrheit zu gelangen, von welcher Art die Aufg. auch sei.

Der franz. Uebers. M. Comte.

Analyſis.

Weil die Sehne DF prll. zu AE, ſo iſt der Bog. EF gleich AD und folglich W. EBF = ABD, d. h. er iſt die Hälfte von dem W. DBC. Aber dieſer letztere W. iſt das Doppelte von dem W. an der Periph. DFC oder von dem ihm gleichen BGF; alſo ſind die W. BGF und GBF gleich und der Tr. BFG iſt gleichſchenklig.

Die Aufl. der vorgelegten Aufg. würde alſo erfordern, daß man CFG ſo ziehen könnte, daß der äußere Theil FG gleich dem Halbm. des Kr. würde.

Andere Auflöſung.

Es ſei der W. ABD (Fig. 25 bis) $\frac{1}{3}$ des W. ABC. Errichtet den Perpend. DAC, und vollendet das Rect. BACE, verl. EC und BD, bis ſie ſich in F treffen und ziehet CG, welche den W. FCG gl. GFC macht.

Analyſis

Da die W. FCG und GFC gleich ſind, ſo iſt die Seite GF gleich CG und jeder der vorherg. W. iſt die Hälfte von dem äußeren W. CGB. Aber weil W. CBA das Dreifache von ABD iſt, ſo folgt hieraus, daß W. CBA das Doppelte von ABD oder von dem ihm gleichen CFG iſt; alſo iſt W. CBG gleich CGB und die Seite BC iſt gleich CG. Ueberdem, wenn Ihr von dem rechten W. EBA und FCD die gleichen W. ABD u. FCG abnehmt, ſo werden die bleibenden W. EBD und GCD gleich ſein. Aber ∠EBD = BDA = CDF; mithin iſt W. GCD gleich GDC und folglich iſt die Seite GD

gleich GC. Man sieht aus diesem Resultat, daß die vi gerade L. BC, GC, GD u. GF alle gleich sind. Fol lich ist DF ein äußerer Abschnitt der gesuchten L. B das Doppelte von der Diagonale des Rect. ABEC.

Anmerk. Dieses sind die Endbedingungen, von we chen die Trisection eines W. abhängt. Sie aber i Allgemeinen zu erfüllen, übersteigt die Kräfte d Elementar-Geometrie. Wir können uns nicht verhe len, daß wir nur in sehr wenigen besondern Fällen t Trisection eines W. ausführen können, wenn wir n die gerade L. und den Kreis anwenden.

Wenn also der gegebene W. die Hälfte von eine Rechten ist, so kann die Aufg. auf folgende Art gel werden.

Verl. BE (Fig. 25 ter), so daß BH = 2BC, z het AH, verl. BA um AI = AH und beschreibet üb BI einen Halbkr; er wird von der verlängerten EC F geschnitten werden, und wenn Ihr BF zieht, so wi der also gebildete W. ABF ⅓ von ABC sein.

Dieses letztere Resultat kann direct durch eine einfac Untersuchung der Aufg. bewiesen werden.

Denn $BH^2 = 4BC^2 = 8BA^2$ und

$$AI^2 = BH^2 + BA^2 = 9BA^2;$$

also AI = 3BA BI = 4BA und OI = 2BA.

Fället jetzt den Perpend. FL, verl. ihn unter I um LM = FL, und ziehet OF und OM.

Es ist einleuchtend, daß OF und OM gleich sin und daß FM = 2BA; da nun OF = OI = 2BA, ist OF = OM = FM = 2BA; mithin ist der Tr. FOI gleichseitig und der W. FOM ist folgl. = ⅓ Rechten.

Es folgt hieraus, daß der W. FOL = $\frac{1}{3}$ Rechten ist, und daß Winkel ABF, augenscheinlich die Hälfte von FOL = $\frac{1}{6}$ Rechten ist *).

XXVI. Satz.

Aufgabe.

Die Bedingungen zu bestimmen, welche man befriedigen muß, um zwischen zwei gegebenen geraden Linien zwei mittlere Proportionallinien einzuschalten *).

Angenommen sei, die S. AB u. AC (Fig. 26) des Rectangels ABCD seien die zwei äußersten Glieder einer stetigen Proportion die DE und AG zu mittleren Glieder hat, so daß man habe

AB : DE = DE : AG = AG : AC.

*) Dieser Fall läßt sich übrigens noch leichter behandeln. Grüson.

**) Unter mittleren Proportionallinien zwischen zwei gegebenen L. verstehet man solche, welche die mittleren Gl. einer stetigen Proportion bilden, deren äußere Gl. die gegebenen L. sind.

Wenn man x und y die zwei gesuchten gr. L. a, und b die zwei gegebenen L. nennt, so muß man haben

$$a : x = x : y = y : b.$$

Diese Proportion liefert offenbar zwei Gleichungen

$$x^2 = ay, \quad y^2 = bx,$$

Analyſis.

Ziehet CE und CG. Die Tr. DCE u. ACG ähnlich, denn ſie ſind beide rechtw., der eine in D, andere in A und überdem

AB oder CD : DE = AG : AG;

die W. DEC und ACG ſind alſo gleich und folgl. E eine gerade L.

Ziehet die Diag. BC und AD und verbindet if Durchſchnittsp. O mit F und G.

Weil die Tr. BOD und BOA gleichſchenklig ſ

ſo iſt $OE^2 = OD^2 + BE \cdot ED$ *)

und $OG^2 = OA^2 + BG \cdot GA$.

Aber BG : BE = GA : AC = oder DE : GA,

---

aus welcher man durch Elimination ableiten kann

$$x^3 = a^2b, \quad y^3 = ab^2.$$

Wenn man ſetzt, daß $b = 2a$ iſt, ſo iſt alsdann $x^3 =$ d. h. daß der aus der geſuchten L. gebildete Würfel pelt ſo groß iſt als der, deſſen S. die gegeb. L. iſt. Aufg. von der Verdoppelung des Würfels iſt alſo nur beſonderer Fall von der Aufg., die uns beſchäftiget.

Allgemein kann ſie mit der gr. L. u. dem Kr. nicht gelöſt werden; man kann aber einer numeriſchen Aufl. Wunſch näher gekommen ſein u. dieſe Aufl. kann durch Durchſchnitt zweier Parabeln, deren Gleichungen $x^2 = y^2 = 2ax$ conſtr. werden.

*) Wenn der Perpd. OI auf BD gefällt worden, ſo man $OE^2 = OI^2 + IE^2$; $OD^2 = OI^2 + ID^2$; folg $OE^2 = OD^2 + IE^2 - ID^2 = OD^2 + (IE + ID)(IE -$ $= OD^2 + BE \cdot ED$.

hin BG . GA = BE . DE; ferner OA = OD, also OE = OG und der P. O ist von den P. E und G gleich weit entfernt.

Es folgt hieraus, daß, wenn man um das gegebene Rect. einen Kreis beschriebe, das da zwischen liegende Segm. EC gleich GH sein würde.

Erste Auflösung.

Die Aufg. wird also aufgelöst sein, wenn man durch den P. C eine gerade L. ECG so ziehen kann, daß die Entfernung OE gleich OG oder daß die äußeren Theile EC, GH eines Kreises gleich seien.

Zweite Auflösung.

Da der erste Theil der Constr. der nämliche bleibt u. nachdem man bewiesen, daß das Rect. BE . ED gl. BG . GA, so halbirt BD in F (Fig. 26 bis); es ist einleuchtend, daß BE . ED + DF² oder EF² = BG . GA + DF². Constr. jetzt über AB den gleichsch. Tr. BKA, dessen Seiten KB, KA jede gleich DF sind und ziehet GK; alsdann ist

BG . GA + AK² = GK² und folgl.

GK = EF. Aber nach der Hypoth.

AB : DE = DE : GA = GA : AC,

mithin AB : GA = DE : AC oder

2AB : GA = 2DE : AC;

ziehet Ihr GF und verl. sie bis zum Durchschn. E mit AB, so wird der so gebildete Tr. BKL congr. CFD u. CD oder AB = BL. Also

AL : GA = DE : AC oder BD oder = DE : ½BD; es folgt hieraus, daß

GL : GA = EF : DF.

Ziehet LK und führet AM prll.; alsdann ist

GL : GA = GK : GM, woraus

EF : DF = GK : GM; aber

EF = GK, also DF = GM.

Aus diesem Ergebniß folgt, daß LK und ihre Prll. AM der Lage nach bekannt sind, weil die P. F, L, K offenbar gegeben sind. Die Aufg. findet sich also darauf reducirt, durch einen P. K eine gerade L. KMG so zu ziehen, daß der zwischen der Verl. AM u. BA enthaltene Theil MG gleich sei der Hälfte von der gegebenen Seite AC.

Dritte Auflösung.

Immer angenommen, die rechtw. auf einander stehenden geraden L. AB und AC (Fig. 26 ter) seien die äußern Gl. der stetigen Proportion; nehmet auf den Verlängerungen von AC und AB zwei Punkte D, E, so daß AB : AD = AD : AE = AE : AC. Alsdann ist $AE^2 = AD \cdot AC$; mithin befindet sich der P. E auf dem Halbkr., dessen Durchm. CD ist.

Ziehet DE, verl. DB bis zur Periph. und errichtet den Halbm. IF perpend. auf DC.

Weil AB : AD = AD : AE und der W. DAE den beiden Tr. BAD und DAE gemein ist, so sind diese Tr. ähnlich; folglich W. ADB gl. AED und Bg. CG gleich Bg. DE; woraus folgt, daß der Bg. FG gleich ist FE und daß der Abschnitt IH vom Durchmesser

gleich IA ist oder daß die schiefe Linie GL gleich LB ist.

Die Aufl. der Aufg. hängt also von der Bedingung ab, daß GD seinen Abschnitt GL gleich LB habe oder daß die Perpd. EA und GH gleich weit vom Mittelp. abstehen.

Das Verh. von KI zu IC ist offenbar dasselbe als das von AB zu AC. Folgl., nachdem man mit dem Halbm. IC einen Halbkr. beschr. hat, könnte man alsdann durch B eine gerade L. BD so ziehen, daß der Theil BG von dieser L., welcher zwischen der Periph. und der aus dem andern Endp. des Durchm. gezogenen L. CKM enthalten ist, durch den Halbm. IF halbirt würde, so würde die Aufg. gelöst sein; denn nimmt man AN = AD und zieht man CN, welche IF in O trift, so ist nach dem was vorherg., offenbar, daß IK, IO, IL und IC eine stetige Proport. bilden.

XXVII. Satz.

Die folgende Aufg. als aufgelöst angenommen, wenn man

$$3AG^2 = AE^2 + EB^2 + EF \text{ hat,}$$

so ist der W. CEG des Kl. CEG bestimmt.

Aufgabe.

Wenn in dem Halbkr. ABD (Fig. 27) die halbe Sehne EF und der Halbmesser CD auf

dem Durchmesser AB perpendikular stehen, so verlangt man, eine gerade Linie AG zu ziehen, so daß

$$3\,AG^2 = AE^2 + EB^2 + EF^2.$$

Auflösung.

Traget in den Kreis eine Sehne BH gl. dem Halbmesser ein, ziehet AH und ziehet damit EA prll., welche CD in G trift; wenn Ihr alsdann AG ziehet, so wird sein: $3\,AG^2 = AE^2 + EF^2 + EB^2$.

In der That, da die Tr. AHB und ECG augenscheinlich ähnlich sind, so ist

$AB : BH = EG : CG$;

aber $AB = 2\,BH$, mithin $EG = 2\,CG$.

Also $EG^2 = 4\,CG^2$ und $EC^2 = 3\,CG^2$;

folgl. $3\,AG^2 = 3\,AC^2 + EC^2 = 2\,AC^2 + 2\,EC^2 + AC^2 - EC^2$.

Jetzt, wegen $AC = \frac{EB + AE}{2}$

und $EC = \frac{EB - AE}{2}$, ist

$2\,AC^2 + 2\,EC^2 = AE^2 + EB^2$

und $AC^2 - EC^2 = EF^2$, folglich

$$3\,AG^2 = AE^2 + EF^2 + EB^2.$$

XXVIII. Satz.

Aufgabe.

Wenn einer von den Winkeln eines Triangels gegeben ist, so stehet der Ueberschuß vom

Quadrat der Summe der Seiten, die dieſen Wi-
kel einſchließen, über das Quadrat der Grun-
nie zum Inhalt des Triangels in einem beſtimm-
ten Verhältniß.

Es ſei ABC (Fig. 28) ein Triangel, deſſen Seite AB um BD = BC verlängert iſt, ſo ſtehet der Ueberſchuß des Quadrats von AD über das von AC mit dem Inhalte des Triangels in einem beſtimmten Verhältniß.

Analyſis.

Ziehet AE prll. BC bis ſie verl. CD in E trift; aus B fället den Perpd. BF und ziehet BE.

Da der Tr. CBD gleichſch. iſt, ſo iſt W. CDB gl. DCB u. folgl. gl. CEA; der Tr. DAE iſt alſo auch gleichſch. Es folgt hieraus, daß $AD^2 = AC^2 + DC.CE$ oder $AD^2 - AC^2 = DC.CE$. Ueberdem, weil AE prll. zu BC, ſo iſt der Tr. ABC gl. dem Tr. EBC d. h. gleich der Hälfte des Rect. BF. CE. Folglich iſt der Ueberſchuß des Qdrts. von AD über das Qdrt. von AC zum Inhalte des Tr. ABC wie DC.CE zu $\frac{1}{2}$BF.CE, oder wie DC zu $\frac{1}{2}$BF oder auch wie 4DF zu BF. Da aber der gegeb. W. ABC gl. CDB + BCD iſt und gl. dem Doppelten von jedem dieſer W., ſo iſt W. BDF bekannt; woraus hervorgeht, daß der rechtw. Tr. BDF der Gattung nach beſtimmt und das Verhältniß von DF zu BF bekannt iſt; eben ſo es iſt mit dem Verhältniß

DF zu BF oder vom Ueberschuß des Qdrts. von AD über das von AC zum Inhalte des Triangels.

Synthesis.

Behält man dieselbe Constr. bei, so ist klar, daß

DC . CE : BF , CE = DC : BF,

aber DC . CE = $AD^2 - AC^2$ u. BF . CE ist der doppelte Inhalt des Tr. ABC; mithin ist 2 DC zu BF wie der Ueberschuß des Qdrts. von AD über das Qdr. von AC zu dem Inhalt des Tr. ABC.

Zweites Buch.

Erklärungen.

ie von einer beständigen Grß. herrührende veränder
Grß., oder die davon durch irgend eine einem be
nten Gesetze unterworfene Rel. abhängt, ist nothw.
hen gewissen äußern Grenzen enthalten. Wenn sie
größtmöglichen Werth erlangt hat, so sagt man,
sie ihr Maximum erreicht hat; und wenn sie sich
in ihre kleinsten Dimensionen zusammenzieht, so ist
n Zustande des Minimums.

I. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade
e zu ziehen, welche auf zwei gegebenen Paral
i Abschnitte giebt, die zu einander ein gege
es Verhältniß haben.

Es seien AB und CD (Fig. 1, Tafel 2)

zwei Parallelen, auf denen man in jeder einen P. P und O fixirt; man soll durch einen andern gegebenen Punkt E eine gerade Linie EF so ziehen, daß PG zu OF in einem gegebenen Verhältniß stehet.

Analysis.

Ziehet PO und verläng. diese gerade L., bis daß sie EF in I trift.

Weil PG und OF Prll. sind, so ist

$$PI : OI = PG : OF,$$

aber das Verh. von PG zu OF ist gegeben; die von PI zu OI und von PO zu OI sind es also auch, woraus folgt, daß OI und der P. I bekannt sind, weil PO gegeben ist, mithin sind IEF und die Abschnitte PG und OF bestimmt.

Synthesis.

Nehmet PK = M und OL = N; ziehet KL, PO und verl. sie, bis sie sich in I treffen; diesen P. verbindet mit E durch die gerade L. IEF, so sind PG und OF die gesuchten Abschnitte.

Denn da die Prllen. AB und CD durch IK, IP u. IG in proportionale Theile geschnitten sind, so ist das Verh. PG zu OF gleich dem von KP zu OL oder von M zu N.

Wenn M = N, so liegt der P. I unendlich weit und EF wird offenbar prll. zu OP.

Wenn KL und PO in dem gegebenen P. E zusammen laufen, so ist die Aufg. unbestimmt; in der That, in diesem Falle sind die Abschn. PG und OF, welche von einer beliebigen durch E gehenden L. abgeschnitten werden, in dem gegebenen Verhältniß.

II. Satz.

Aufgabe.

Es sind zwei sich schneidende Linien der Lage nach gegeben, man soll durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche auf ihnen Abschnitte bestimmt, deren Verhältniß gleich einem gegebenen Verhältniß ist.

Es werde verlangt, durch den P. D (Fig. 2) die gerade Linie EDF so zu ziehen, daß AE zu AF sei wie M zu N.

Analysis.

Durch D ziehet AE prll. zu DG, die AC oder ihre Verlängerung in G trift.

Wegen der ähnl. Tr. EAF und DGF haben wir

$$AE : AF = GD : GF;$$

aber das Verh. von AE zu AF ist gegeben, das von GD zu GF ist es also auch. Und weil GD und der P. G offenbar bekannt sind, so ist es auch so mit GF und dem P. F.

Synthesis.

Auf AB und AC nehmet AK = M und AL = N; ziehet KL und leget durch D zu dieser gr. L. die Prll. DEF, so sind AE und AF die verl. Abschnitte.

Denn die Prll. EF und KL schneiden AB und AC in proportionale Theile und das Verh. von AE zu AF ist dasselbe als von AK zu AL oder von M zu N.

III. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf jeder von ihnen Abschnitte bestimmt, die ein gegebenes Verhältniß haben; diese Abschnitte so genommen, daß der erste vom Durchschnittspunkt an und der zweite vom gegebenen Punkt an gerechnet wird.

Es seien AB und AC (Fig. 3) zwei gerade Linien, die sich schneiden; man soll durch den Punkt D die Linie EDF so ziehen, daß AE zu OF wie M zu N sei.

Analysis.

Ziehet DG prll. zu AE, die AC oder ihre Verl. in H trift; nehmet einen P. H so daß

AE : GD = OF : OH.

Da das Verh. von AE zu OF bekannt ist, so ist es also das von GD zu OH auch; und weil GD und der P. O gegeben sind, so ist dieses eben der Fall mit OH und dem P. H. Wegen der Pll. DG und AE ist

AE : GD = AF : GF;

mithin OF : OH = AF : GF,

woraus folgt, daß

FH : OH = AG : GF

und GF . FH = AG . OH.

Aber AG und OH sind beide bekannt, mithin ist das Rect. aus den Abschn. GF und FH, deren Diff. bekannt ist, bestimmt; der Punkt F und die gerade L. ED sind es also auch.

Synthesis.

Nehmet den P. H so daß

GD : OH = M : N

und suchet auf der verl. GH einen P. F, der so beschaffen ist, daß das Rect. GF.FH gleich ist AG.OH; ziehet EDF und die Abschn. AE, OF sind in dem Verh. von M zu N.

Denn GF . FH = AG . OH; also

FH : OH = AG : GF

und OF : OH = AF : GF; aber

AE : GD = AF : GF, folglich

AE : OF = GD : OH, d. h. = M : N.

IV. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß die Entfernungen der Punkte, wo sie die beiden ersten trift, von zwei auf diesen Linien gegebenen Punkten in einem ebenfalls gegebenen Verhältniß seien.

Es seien AB, AC (Fig. 4) zwei sich schneidende Linien; es ist aufgegeben, durch den Punkt D die gerade Linie EDF so zu ziehen, daß PE zu OF sich verhalte, wie M zu N, wenn die Punkte E und O gegeben sind.

Analysis.

Ziehet DP, die AC in I trift; und durch I ziehet IK prll. zu AB, welche EF in K schneidet.

Weil die P. P und D gegeben sind, so ist die gr. L. PD der Lage nach gegeben und folglich sind der P. I und die gerade L. IK gleichfalls bestimmt.

Aber PE : IK = PD : ID,

mithin ist das Verh. von PE u. IK bekannt, weil PD und ID gegeben sind. Da übrigens das Verh. PE und OF gegeben ist, so ist es das von IK zu OF auch;

folglich

folglich wird mittelst der vorherg. Proportion die Lage der geraden L. EDF bestimmt sein.

Synthesis.

Ziehet PD und führet IK prll. zu AB; nehmet eine L. IK = L, so daß das Verh. von M zu L gleich sei dem von PD zu ID, und ziehet mittelst des vorhergeh. Satzes die gr. L. KDF, so daß IK sich verh. zu OF wie L zu N; so werden PE und OF die gesuchten Abschnitte sein.

Denn PE : IK = PD : ID = M : L
und IK : OF = L : N; folglich
PE : OF = M : N.

V. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei Parallelen und eine sie schneidende gerade Linie gegeben sind, durch einen Punkt dieser Secante eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß die Abschnitte auf den Parallelen zwischen jener Linie und der Secante liegend ein gegebenes Rectangel bilden.

Es seien AB, CD zwei Parallelen (Fig. 5) und OPG eine Secante; man verlangt durch den Punkt G die gerade Linie GFE zu ziehen, welche

dem Durchmesser AB perpendikular stehen, so verlangt man, eine gerade Linie AG zu ziehen, so daß

$$3AG^2 = AE^2 + EB^2 + EF^2.$$

Auflösung.

Traget in den Kreis eine Sehne BH gl. dem Halbmesser ein, ziehet AH und ziehet damit EA prll., welche CD in G trift; wenn Ihr alsdann AG ziehet, so wird sein: $3AG^2 = AE^2 + EF^2 + EB^2$.

In der That, da die Tr. AHB und ECG augenscheinlich ähnlich sind, so ist

$AB : BH = EG : CG$;

aber $AB = 2BH$, mithin $EG = 2CG$.

Also $EG^2 = 4CG^2$ und $EC^2 = 3CG^2$;

folgl. $3AG^2 = 3AC^2 + EC^2 = 2AC^2 + 2EC^2 + AC^2 - EC^2$.

Jetzt, wegen $AC = \frac{EB + AE}{2}$

und $EC = \frac{EB - AE}{2}$, ist

$2AC^2 + 2EC^2 = AE^2 + EB^2$

und $AC^2 - EC^2 = EF^2$, folglich

$3AG^2 = AE^2 + EF^2 + EB^2$.

XXVIII. Satz.

Aufgabe.

Wenn einer von den Winkeln eines Triangels gegeben ist, so stehet der Ueberschuß vom

Quadrat der Summe der Seiten, die diesen Wi-
kel einschließen, über das Quadrat der Grund-
nie zum Inhalt des Triangels in einem bestimm-
ten Verhältniß.

Es sei ABC (Fig. 28) ein Triangel, dessen Seite AB um BD = BC verlängert ist, so stehet der Ueberschuß des Quadrats von AD über das von AC mit dem Inhalte des Triangels in einem bestimmten Verhältniß.

Analysis.

Ziehet AE prll. BC bis sie verl. CD in E trift; aus B fället den Perpd. BF und ziehet BE.

Da der Tr. CBD gleichsch. ist, so ist W. CDB gl. DCB u. folgl. gl. CEA; der Tr. DAE ist also auch gleichsch. Es folgt hieraus, daß $AD^2 = AC^2 + DC.CE$ oder $AD^2 - AC^2 = DC.CE$. Ueberdem, weil AE prll. zu BC, so ist der Tr. ABC gl. dem Tr. EBC d. h. gleich der Hälfte des Rect. BF.CE. Folglich ist der Ueberschuß des Qdrts. von AD über das Qdrt. von AC zum Inhalte des Tr. ABC wie DC.CE zu $\frac{1}{2}$BF.CE, oder wie DC zu $\frac{1}{2}$BF oder auch wie 4DF zu BF. Da aber der gegeb. W. ABC gl. CDB + BCD ist und gl. dem Doppelten von jedem dieser W., so ist W. BDF bekannt; woraus hervorgeht, daß der rechtw. Tr. BDF der Gattung nach bestimmt und das Verhältniß von DF zu BF bekannt ist; eben so es ist mit dem Verhältniß

DF zu BF, oder vom Ueberſchuß des Qdrts. von AD über das von AC zum Inhalte des Triangels.

Syntheſis.

Behält man dieſelbe Conſtr. bei, ſo iſt klar, daß

DC . CE : BF , CE = DC : BF,

aber DC . CE = $AD^2 - AC^2$ u. BF . CE iſt der doppelte Inhalt des Tr. ABC; mithin iſt c DC zu BF wie der Ueberſchuß des Qdrts. von AD über das Qdr. von AC zu dem Inhalt des Tr. ABC.

Zweites Buch.

Erklärungen.

Eine von einer beständigen Grß. herrührende veränderliche Grß., oder die davon durch irgend eine einem bestimmten Gesetze unterworfene Rel. abhängt, ist nothw. zwischen gewissen äußern Grenzen enthalten. Wenn sie den größtmöglichen Werth erlangt hat, so sagt man, daß sie ihr Maximum erreicht hat; und wenn sie sich bis in ihre kleinsten Dimensionen zusammenzieht, so ist sie im Zustande des Minimums.

I. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei gegebenen Parallelen Abschnitte giebt, die zu einander ein gegebenes Verhältniß haben.

Es seien AB und CD (Fig. 1, Tafel 2)

DF zu BF oder vom Ueberſchuß des Qdrts. von AD über das von AC zum Inhalte des Triangels.

Syntheſis.

Behält man dieſelbe Conſtr. bei, ſo iſt klar, daß

$DC . CE : BF . CE = DC : BF,$

aber $DC . CE = AD^2 - AC^2$ u. $BF . CE$ iſt der doppelte Inhalt des Tr. ABC; mithin iſt c DC zu BF wie der Ueberſchuß des Qdrts. von AD über das Qdr. von AC zu dem Inhalt des Tr. ABC.

zwei Parallelen, auf denen man in jeder einen P. P und O fixirt; man soll durch einen andern gegebenen Punkt E eine gerade Linie EF so ziehen, daß PG zu OF in einem gegebenen Verhältniß stehet.

Analysis.

Ziehet PO und verläng. diese gerade L., bis daß sie EF in I trift.

Weil PG und OF Prll. sind, so ist

$$PI : OI = PG : OF,$$

aber das Verh. von PG zu OF ist gegeben; die von PI zu OI und von PO zu OI sind es also auch, woraus folgt, daß OI und der P. I bekannt sind, weil PO gegeben ist, mithin sind IEF und die Abschnitte PG und OF bestimmt.

Synthesis.

Nehmet PK = M und OL = N; ziehet KL, PO und verl. sie, bis sie sich in I treffen; diesen P. verbindet mit E durch die gerade L. IEF, so sind PG und OF die gesuchten Abschnitte.

Denn da die Prllen. AB und CD durch IK, IP u. IG in proportionale Theile geschnitten sind, so ist das Verh. PG zu OF gleich dem von KP zu OL oder von M zu N.

Wenn M = N, so liegt der P. I unendlich weit und EF wird offenbar prll. zu OP.

Wenn KL und PO in dem gegebenen P. E zusammen laufen, so ist die Aufg. unbestimmt; in der That, in diesem Falle sind die Abschn. PG und OF, welche von einer beliebigen durch E gehenden L. abgeschnitten werden, in dem gegebenen Verhältniß.

III. Satz.

Aufgabe.

Es sind zwei sich schneidende Linien der Lage nach gegeben, man soll durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche auf ihnen Abschnitte bestimmt, deren Verhältniß gleich einem gegebenen Verhältniß ist.

Es werde verlangt, durch den P. D (Fig. 2) die gerade Linie EDF so zu ziehen, daß AE zu AF sei wie M zu N.

Analysis.

Durch D ziehet AE prll. zu DG, die AC oder ihre Verlängerung in G trift.

Wegen der ähnl. Tr. EAF und DGF haben wir

$$AE : AF = GD : GF;$$

aber das Verh. von AE zu AF ist gegeben, das von GD zu GF ist es also auch. Und weil GD und der P. G offenbar bekannt sind, so ist es auch so mit GF und dem P. F.

Synthesis.

Auf AB und AC nehmet AK = M und AL = N; ziehet KL und leget durch D zu dieser gr. L. die Prll. DEF, so sind AE und AF die verl. Abschnitte.

Denn die Prll. EF und KL schneiden AB und AC in proportionale Theile und das Verh. von AE zu AF ist dasselbe als von AK zu AL oder von M zu N.

III. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf jeder von ihnen Abschnitte bestimmt, die ein gegebenes Verhältniß haben; diese Abschnitte so genommen, daß der erste vom Durchschnittspunkt an und der zweite vom gegebenen Punkt an gerechnet wird.

Es seien AB und AC (Fig. 3) zwei gerade Linien, die sich schneiden; man soll durch den Punkt D die Linie EDF so ziehen, daß AE zu OF wie M zu N sei.

Analysis.

Ziehet DG prll. zu AE, die AC oder ihre Verl. in H trift; nehmet einen P. H so daß

AE : GD = OF : OH.

Da das Verh. von AE zu OF bekannt ist, so ist es also das von GD zu OH auch; und weil GD und der P. O gegeben sind, so ist dieses eben der Fall mit OH und dem P. H. Wegen der Pell. DG und AE ist

AE : GD = AF : GF;

mithin OF : OH = AF : GF,

woraus folgt, daß

FH : OH = AG : GF

und GF . FH = AG . OH.

Aber AG und OH sind beide bekannt, mithin ist das Rect. aus den Abschn. GF und FH, deren Diff. bekannt ist, bestimmt; der Punkt F und die gerade L. ED sind es also auch.

Synthesis.

Nehmet den P. H so daß

GD : OH = M : N

und suchet auf der verl. GH einen P. F, der so beschaffen ist, daß das Rect. GF.FH gleich ist AG.OH; ziehet EDF und die Abschn. AE, OF sind in dem Verh. von M zu N.

Denn GF . FH = AG . OH; also

FH : OH = AG : GF

und OF : OH = AF : GF; aber

AE : GD = AF : GF, folglich

AE : OF = GD : OH, d. h. = M : N.

IV. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß die Entfernungen der Punkte, wo sie die beiden ersten trift, von zwei auf diesen Linien gegebenen Punkten in einem ebenfalls gegebenen Verhältniß seien.

Es seien AB, AC (Fig. 4) zwei sich schneidende Linien; es ist aufgegeben, durch den Punkt D die gerade Linie EDF so zu ziehen, daß PE zu OF sich verhalte, wie M zu N, wenn die Punkte E und O gegeben sind.

Analysis.

Ziehet DP, die AC in I trift; und durch I ziehet IK prll. zu AB, welche EF in K schneidet.

Weil die P. P und D gegeben sind, so ist die gr. L. PD der Lage nach gegeben und folglich sind der P. I und die gerade L. IK gleichfalls bestimmt.

Aber PE : IK = PD : ID,

mithin ist das Verh. von PE u. IK bekannt, weil PD und ID gegeben sind. Da übrigens das Verh. PE und OF gegeben ist, so ist es das von IK zu OF auch;

folglich

folglich wird mittelst der vorherg. Proportion die Lage der geraden L. EDF bestimmt sein.

Synthesis.

Ziehet PD und führet IK prll. zu AB; nehmet eine L. IK = L, so daß das Verh. von M zu L gleich sei dem von PD zu ID, und ziehet mittelst des vorhergeh. Satzes die gr. L. KDF, so daß IK sich verh. zu OF wie L zu N; so werden PE und OF die gesuchten Abschnitte sein.

Denn PE : IK = PD : ID = M : L
und IK : OF = L : N; folglich
PE : OF = M : N.

V. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei Parallelen und eine sie schneidende gerade Linie gegeben sind, durch einen Punkt dieser Secante eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß die Abschnitte auf den Parallelen zwischen jener Linie und der Secante liegend ein gegebenes Rectangel bilden.

Es seien AB, CD zwei Parallelen (Fig. 5) und OPG eine Secante; man verlangt durch den Punkt G die gerade Linie GFE zu ziehen, welche

zwei Segmente OE und PF abschneidet, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei.

Analysis.

Weil AB und CD prll. sind, so ist

$$GO : GP = OE : PF \text{ und folglich}$$
$$GO : GP = OE^2 : PF \cdot OE;$$

nun sind GO und GP gegeben, mithin ist es das Verh. von OE^2 zu $PF \cdot OE$ auch; aber das Rect. $PF \cdot OE$ ist gleichfalls gegeben; folglich ist das Qdrt. von OE und OE überdies selbst bestimmt.

Synthesis.

Auf GO traget von G in I eine mittlere Proportionale zwischen GQ und GP, ziehet IK prll. zu AB u. CD und machet diese gr. L. IK so lang, daß ihr Qdr. gleich dem gegebenen Rect. sei. Ziehet die gr. L. EKFG, so ist dieses die verl. L.

Denn da OE, IK und PF prll. sind, so ist

$$OG : IG = OE : IK \text{ und}$$
$$PG : IG = PF : IK;$$

diese Prop. zusammengesetzt geben

$$OG \cdot PG : IG^2 = OE \cdot PF : IK^2,$$

aber $OG \cdot PG = IG^2$,

folglich $OE \cdot PF = IK^2$.

VI. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die auf zwei gegebenen Parallelen und von zwei auf denselben gegebenen Punkten ausgegangen zwei Abschnitte giebt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei.

Es seien AB und CD (Fig. 6, Tafel 2) zwei Paralleln, auf welchen man die Punkte O und P giebt; durch den Punkt G eine gerade Linie GFE zu ziehen, so daß die Abschnitte OE, und PF ein gegebenes Rect. bilden.

Analysis.

Ziehet GO und GP, welche CD und AB in I und H treffen. Diese zwei P. sind bekannt, weil, da die P. P, O u. G gegeben sind, die gr. L. GIO und GPH der Lage nach gegeben sind. Da AB pll. zu CD ist, so ist klar, daß

$$GP : GH = PF : HE,$$

oder, welches auf eins hinaus läuft,

$$GP : GH = PF \cdot OE : HE \cdot OE.$$

Da jetzt GP und GH gegeben sind, so ist es ihr Verhältniß auch; eben so es ist mit dem Verh. von PF mal OE zu (HE mal OE) so das erste von diesen Rect. ge-

geben ist, so ist also das zweite bekannt; da überdem der Unterſch. von HE u. OE gegeben ist, so ist einleuchtend, daß der P. E beſt. ist u. folgl. auch die gesuchte L. EFG.

Synthesis.

Ziehet GO und GP; traget von H in K eine gr. L. HK, welche mit GP ein Rect. gl. dem gegebenen Rect. bildet; suchet nachgehends auf die Verl. von HO einen P. E so daß das Rect. HE. OE gl. dem HG. HK sei; die gerade L., welche diesen P. mit G verbindet, ist die gesuchte gr. L.

Denn HE : PF = HG : GP, woraus
HE . OE : PF . OE = HG . HK : GP . HK;
aber durch Constr. ist das Rect. HE. OE gl. GH. HK, folglich ist PF . OE gl. GP . HK, d. h. gl. dem gegebenen Rectangel.

VII. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei gerade Linien, die sich schneiden, gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, so daß die Abschnitte, welche sie auf ihnen von ihrem Zusammenlaufungspunkt an bestimmt, ein gegebenes Rectangel bilden.

Es seien AB und AC (Fig. 7) die zwei

gegebenen Linien; man verlangt, durch den Punkt D die gerade Linie DFE so zu ziehen, daß das Rectangel aus den Abschnitten AE, AF gl. einem gegebenen Rectangel sei.

Analysis.

Ziehet HD prll. zu AB und nehmet den P. I so, daß DH.AI gleich dem gegebenen Rect. sei.

Weil AE . AF = DH . AI, so ist

AE : DH = AI : AF, aber andererseits

AE : DH = AF : AH, mithin

AF : FH = AI : AF;

woraus erhellet, daß

AH : AF = IF : AI und folglich

AH . AI = AF . IF.

Nun gehören AH und DH zu der Zahl der gegebenen; mithin ist AI bekannt so wie auch das Rectangel AF . IF. Die Aufg. reducirt sich also darauf, eine gegebene L. AI im P. F so zu theilen, daß das Rect. der beiden Abschn. dem gegebenen Rect. gleich sei, welche Aufg. bereits gelöst worden.

Synthesis.

Ziehet DH prll. zu AB, bestimmt den P. I durch die Bedingung, daß DH.AI gleich dem gegebenen Rect. sei und theilet AI so, daß das Rect. der Segm. AF, FI gleich dem Rect. AI . AH sei; so ist EDF die gesuchte gr. L.

IV. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß die Entfernungen der Punkte, wo sie die beiden ersten trift, von zwei auf diesen Linien gegebenen Punkten in einem ebenfalls gegebenen Verhältniß seien.

Es seien AB, AC (Fig. 4) zwei sich schneidende Linien; es ist aufgegeben, durch den Punkt D die gerade Linie EDF so zu ziehen, daß PE zu OF sich verhalte, wie M zu N, wenn die Punkte E und O gegeben sind.

Analysis.

Ziehet DP, die AC in I trift; und durch I ziehet IK prll. zu AB, welche EF in K schneidet.

Weil die P. P und D gegeben sind, so ist die gr. L. PD der Lage nach gegeben und folglich sind der P. I und die gerade L. IK gleichfalls bestimmt.

Aber PE : IK = PD : ID,

mithin ist das Verh. von PE u. IK bekannt, weil PD und ID gegeben sind. Da übrigens das Verh. PE und OF gegeben ist, so ist es das von IK zu OF auch; folglich

folglich wird mittelst der vorherg. Proportion die Lage der geraden L. EDF bestimmt sein.

Synthesis.

Ziehet PD und führet IK prll. zu AB; nehmet eine L. IK = L, so daß das Verh. von M zu L gleich sei dem von PD zu ID, und ziehet mittelst des vorhergeh. Satzes die gr. L. KDF, so daß IK sich verh. zu OF wie L zu N; so werden PE und OF die gesuchten Abschnitte sein.

Denn PE : IK = PD : ID = M : L
und IK : OF = L : N; folglich
PE : OF = M : N.

V. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei Parallelen und eine sie schneidende gerade Linie gegeben sind, durch einen Punkt dieser Secante eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß die Abschnitte auf den Parallelen zwischen jener Linie und der Secante liegend ein gegebenes Rectangel bilden.

Es seien AB, CD zwei Parallelen (Fig. 5) und OPG eine Secante; man verlangt durch den Punkt G die gerade Linie GFE zu ziehen, welche

zwei Segmente OE und PF abschneidet, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei.

Analysis.

Weil AB und CD prll. sind, so ist

$$GO : GP = OE : PF \text{ und folglich}$$
$$GO : GP = OE^2 : PF \,.\, OE;$$

nun sind GO und GP gegeben, mithin ist es das Verh. von OE^2 zu PF . OE auch; aber das Rect. PF . OE ist gleichfalls gegeben; folglich ist das Qdrt. von OE und OE überdies selbst bestimmt.

Synthesis.

Auf GO traget von G in I eine mittlere Proportionale zwischen GO und GP, ziehet IK prll. zu AB u. CD und machet diese gr. L. IK so lang, daß ihr Qdr. gleich dem gegebenen Rect. sei. Ziehet die gr. L. EKFG, so ist dieses die verl. L.

Denn da OE, IK und PF prll. sind, so ist

$$OG : IG = OE : IK \text{ und}$$
$$PG : IG = PF : IK;$$

diese Prop. zusammengesetzt geben

$$OG \,.\, PG : IG^2 = OE \,.\, PF : IK^2,$$
$$\text{aber } OG \,.\, PG = IG^2,$$
$$\text{folglich } OE \,.\, PF = IK^2.$$

VI. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die auf zwei gegebenen Parallelen und von zwei auf denselben gegebenen Punkten ausgegangen zwei Abschnitte giebt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei.

Es seien AB und CD (Fig. 6, Tafel 2) zwei Paralleln, auf welchen man die Punkte O und P giebt; durch den Punkt G eine gerade Linie GFE zu ziehen, so daß die Abschnitte OE, und PF ein gegebenes Rect. bilden.

Analysis.

Ziehet GO und GP, welche CD und AB in I und H treffen. Diese zwei P. sind bekannt, weil, da die P. P, O u. G gegeben sind, die gr. L. GIO und GPH der Lage nach gegeben sind. Da AB pll. zu CD ist, so ist klar, daß

$$GP : GH = PF : HE,$$

oder, welches auf eins hinaus läuft,

$$GP : GH = PF . OE : HE . OE.$$

Da jetzt GP und GH gegeben sind, so ist es ihr Verhältniß auch; eben so es ist mit dem Verh. von PF mal OE zu (HE . OE) da das erste von diesen Rect. ge-

geben ist, so ist also das zweite bekannt; da überdem der Unterſch. von HE u. OE gegeben ist, so ist einleuchtend, daß der P. E beſt. ist u. folgl. auch die geſuchte L. EFG.

Syntheſis.

Ziehet GO und GP; traget von H in K eine gr. L. HK, welche mit GP ein Rect. gl. dem gegebenen Rect. bildet; ſuchet nachgehends auf die Verl. von HQ einen P. E so daß das Rect. HE. OE gl. dem HG. HK sei; die gerade L., welche dieſen P. mit G verbindet, ist die geſuchte gr. L.

Denn HE : PF = HG : GP, woraus
HE . OE : PF . OE = HG . HK : GP . HK;
aber durch Conſtr. ist das Rect. HE. OE gl. GH. HK, folglich ist PF . OE gl. GP . HK, d. h. gl. dem gegebenen Rectangel.

VII. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei gerade Linien, die sich ſchneiden, gegeben ſind, durch einen gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, so daß die Abſchnitte, welche ſie auf ihnen von ihrem Zuſammenlaufungspunkt an beſtimmt, ein gegebenes Rectangel bilden.

Es seien AB und AC (Fig. 7) die zwei

gegebenen Linien; man verlangt, durch den Punkt D die gerade Linie DFE so zu ziehen, daß das Rectangel aus den Abschnitten AE, AF gl. einem gegebenen Rectangel sei.

Analysis.

Ziehet HD prll. zu AB und nehmet den P. I so, daß DH. AI gleich dem gegebenen Rect. sei.

Weil AE . AF = DH . AI, so ist

AE : DH = AI : AF, aber andererseits

AE : DH = AF : AH, mithin

AF : FH = AI : AF;

woraus erhellet, daß

AH : AF = IF : AI und folglich

AH . AI = AF . IF.

Nun gehören AH und DH zu der Zahl der gegebenen; mithin ist AI bekannt so wie auch das Rectangel AF . IF. Die Aufg. reducirt sich also darauf, eine gegebene L. AI im P. F so zu theilen, daß das Rect. der beiden Abschn. dem gegebenen Rect. gleich sei, welche Aufg. bereits gelöst worden.

Synthesis.

Ziehet DH prll. zu AB, bestimmt den P. I durch die Bedingung, daß DH. AI gleich dem gegebenen Rect. sei und theilet AI so, daß das Rect. der Segm. AF, FI gleich dem Rect. AI . AH sei; so ist EDF die gesuchte gr. L.

Denn durch Constr. ist AF . IF = AI . AH,
mithin AH : AF = IF : AI,
woraus AF : FH = AI : AF.
Ueberdem aber AF : FH = AE : DH,
folglich AE : DH = AI : AF und
AE . AF = DH . AI.

VIII. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie durch ihren Durchschn. mit zwei sich schneidenden Linien einen Triangel von einem gegebenen Flächenraum bilde.

Es sei aufgegeben, durch den P. D (Fig. 8) die gerade Linie EDF zu ziehen, welche die gerade Linien AB, AC so schneidet, daß der Triangel AEF gleich einem gegebenen Raume sei.

Analysis.

Ziehet DH parallel zu AB, fället auf AC die zwei Perpd. ES und DT und nehmet den P. I so, daß ein Tr., der AI zur Grdl. und DT zur Höhe haben würde, dem gegebenen Raum gleich wäre.

Weil die Rect. ES . AF und DT . AI, jeder das Doppelte der Tr. AEF und ADI sind, so sind sie gl. und folgl. ES : DT = AI zu AF.

Da aber die Tr. AES und HDT offenbar ähnlich nd, so ist AE : HD = ES : DT, woraus

AE : HD = AI : AF und

AE . AF = HD . AI,

etzt sind HD und folglich AI gegeben; folglich ist das ect. AE. AF bekannt, und durch den letzten Satz kann an die gr. L. EDF bestimmen.

Synthesis.

Ziehet DH prll. zu AB, fället den Perpend. DT, lbiret ihn in R und nehmet AI so, daß das Rect. R. AI gleich dem gegebenen Raume sei; nachgehends ittelst des vorhergeh. Satzes ziehet EDF, so daß das ect. AE . AF gleich DH . AI sei.

Nachdem der Perpend. ES gefällt worden, dessen ittte Q ist, so ist klar, daß die Tr. AES und HDT nlich sind; mithin

AE . AF : DH . AI = QS . AF : RT . AI;

er das Rect. AE . AF = HD . AI und

folgl. QS . AF = RT . AI;

elches beweist, daß der Tr. AEF gl. dem gegebenen aume ist.

Die Aufg. ist einer einfachen Constr. fähig, in dem alle, wo der P. D *) sich in den durch die gr. L. AB id AC gebildeten Wink. befindet. In der That, ziehet

*) Die Constr. ist eben so einfach, wenn der P. D ßerhalb des W. gegeben ist.

Grüson.

DG prll. zu AC und macht das Prllgrm. AGKI gleich dem gegebenen Raum.

Weil das Parallelogramm AGKI und der Triangel einander gleich sind, wenn Ihr beide von dem Vielseit AEDKLF abzieht, so sind die bleibenden Triangel GED+ILF einerseits und DLK andererseits einander gleich; da aber diese Ergänzungstriangel durch Prll. gebildet sind, so sind sie augenscheinlich ähnlich, und folgl., da GD und IF die Seiten eines rechtw. Tr. sind, so wird DK deren Hypotenuse sein, weil die Inhalte der ähnl. Tr. sich verhalten wie die Qdrt. der gleichliegenden Seiten; folgl. $GD^2+IF^2=DK^2$ oder $IF^2=HI^2-AH^2$. Da nun AH und HI gegeben sind, so ist folglich IF bestimmt.

Synthesis.

Constr. das Prllgrm. AGKI gl. dem geg. Raum; ziehet DH prll. zu AB, über HI beschr. einen Halbkr., in welchem Ihr die Sehne HM gl. AH traget, ziehet IM und machet IF oder IF′ = IM; EDF oder E′DF′ ist die Grdl. des gesuchten Tr.

In der That, da der Tr. HMI rechtw. ist, so ist klar, daß $IH^2 = HM^2+IM^2$ oder auch $DK^2=GD^2+IF^2$; aus diesem Ergebniß und aus der einleuchtenden Aehnlichkeit der Tr. DLK, GED und ILF oder DL′K, GE′D, IL′F′ leitet man also ab, daß der Tr. DLK gleich ist der Summe der Tr. GED u. ILF, oder DL′K′ gleich der Summe der Tr. GE′D und IL′F′.

Wenn man beiderseits den Ueberschuß des Prllgrm.

AK über den Tr. DLK addirt, so gehet daraus hervor, daß der Tr. AEF oder AE′F′ gleich ist dem Prllgrm. AK d. h. dem gegebenen Raum.

XI. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei gerade Linien, die sich schneiden, gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine andere gerade Linie zu ziehen, welche auf ihnen zwei Abschnitte bestimmt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei, wo diese Abschnitte, der eine vom Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie an und der andere von einem fixirten Punkt an auf einer dieser geraden Linie gerechnet werden.

Es sei verlangt, EDF (Fig. 9) so zu ziehen, daß das Rectangel AE.OF gleich sei einem gegebenen Rectangel.

Analysis.

Ziehet DH prll. zu AB und nehmet OI so, daß das Rect. DH.OI gleich dem gegebenen Raum ist; OI und der P. I sind folglich gegeben. Und weil

$$AE \cdot OF = DH \cdot OI,$$

so folgt hieraus, daß

AE : DH = OI : OF;

aber andererseits

AE : DH = AF : FH, mithin

AF : FH = OI : OF.

Aus dieser Prop. gehet hervor, daß

AF : AH = OI : FI und daß

AF . FI = AH . OI.

Also sind AI und das Rect. aus den Abschn. AF, FI gegeben; man kann also den P. F und folglich die gr. L. EDF bestimmen.

Synthesis.

Nachdem man DH prll. zu AB gezogen, und das Rect. DH. OI gleich dem gegebenen Raum gemacht hat, so theile man die gr. L. AI in F oder in F′, so daß das Rect. aus ihren Theilen gl. sei AH . OI: so wird EDF oder E′DF′ die gesuchte L. sein.

In der That, da AF . FI gleich AH . OI, so gehet daraus hervor, daß

AF : AH = OI : IF,

woraus AF : FH = OI : OF;

übrigens aber AF : FH = AE : DH,

folglich AE : DH = OI : OI;

also ist das Rect. AE . OF gleich DH . OI d. h. gl. dem gegebenen Rect.

X. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind so wie auch ein Punkt auf jeder von ihnen, durch einen andern gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, welche auf den beiden erstern und von jedem der auf ihnen gegebenen Punkte ausgehend Abschnitte bestimmt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Raume sei.

Es werde verlangt, EDF (Fig. 10) so zu ziehen, daß das Rectangel OF . PE gleich einem gegebenen Rectangel sei.

Analysis.

Ziehet die gerade L. DQ und durch ihren Durchschnittsp. mit AB ziehet QR prll. zu AC.

Weil DO : DQ = OF : QR, so folgt, daß

DO ; DQ = OF . PE ; QR . PE;

aber DO und DQ sind augenscheinlich gegeben, eben so ist es auch mit dem Verh. von OF . PE zu QR . PE; da das erste von diesen Rect. gegeben ist, so ist also das zweite bestimmt. Wenn man überdem bemerkt, daß die gerade L. QR prll. zu AC ist, so ist sie der Lage

nach bestimmt, u. man wird sehen, daß die Aufg. auf die von uns zuletzt aufgelösten Aufg. zurückkommt.

Synthesis.

Ziehet die gerade L. DQO, ziehet zu AC die Paralleln DH und QR und verl. DH, bis sie in S mit OS zusammentrift, die prll. mit AB durch O läuft; nachgeh. nehmet PI, so daß das Rect. DS.PI gleich dem gegebenen Raume sei, und suchet durch den letzten Satz IX einen P. E auf der Verl. von PI zu bestimmen, der so beschaffen ist, daß QR.PE gl. DH.PI sei; EFD ist die gesuchte gr. L.

Denn DQ:DO = DH:DS = QR:OF, also
DH.PI:DS.PI = PE.QR:PE.OF; aber
DH . PI = PE . QR;
folglich ist das Rect. DS . PI d. h. der gegebene Raum gleich dem Rect. PE.OF.

XI. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene gerade Linie in zwei Abschnitte so zu theilen, daß das Quadrat über dem einen gleich sei dem Rectangel aus dem andern und einer gegebenen Linie.

Es sei aufgegeben, (Fig. 11) AB in C so zu theilen, daß das Rectangel G.AC gleich dem Quadrat von BC sei.

Analysis.

Nehmet BD = G, und weil AC . G = CB², so
t klar, daß AC : CB = CB : BD;
also AB : CB = CD : BD,
woraus AB . BD = CB . CD.
das Rect. AB . BD ist gegeben, also auch CB . CD;
a ferner die L. BD gegeben ist, so ist einleuchtend,
aß man die Lage des P. C bestimmen könnte. (Siehe
n XIII. Satz I. Buch, S. 21).

Synthesis.

Nachdem man BD = G gemacht hat, so bestimmet
an einen P. C so, daß das Rect. CB . CD gleich sei
B . BD; so wird C der gesuchte Theilungsp. sein.

Denn man wird offenbar haben
AB : CB = CD : BD, woraus
C : CB = CB : BD und AC . BD = CB².

XII. Satz.

Aufgabe.

Eine gegebene Linie in zwei Abschnitte zu
eilen, so daß das Quadrat des ersten in einem
gebenen Verhältniß mit dem aus dem zweiten
nd einer gegebenen geraden Linie constr. Rect. sei.

Es sei vorgeschlagen, in AB (Fig. 12)
nen Punkt C so zu bestimmen, daß AC . G zu
B² wie M zu N sei.

Analysis.

Nehmet eine vierte Proportionale H zu den gegebenen geraden L. M, N, G. Ihr werdet alsdann haben

$$AC \cdot G : CB^2 = G : H,$$

folglich $CB^2 = AC \cdot H$.

Die Aufg. ist also auf die vorherg. zurück gebracht.

Synthesis.

Wenn man die L. H wie oben genommen hat, so theile man nach dem letzten Satze AB so, daß $AC \cdot H$ gleich CB^2 sei. Es ist klar, daß alsdann

$AC \cdot G : CB^2 = M : N$; denn

$AC \cdot G : AC \cdot H$ oder $CB^2 = G : H$ oder $= M : N$.

XIII. Satz.

Aufgabe.

Wenn auf einer geraden Linie drei Punkte gegeben sind, so verlangt man, hierauf einen vierten zu finden, so daß das Rectangel gebildet aus seiner Entfernung vom ersten Punkte und einer gegebenen Linie, gleich sei dem Rectangel dessen Seiten seine Entfernungen von den beiden andern Punkten wären.

Es ist die Aufg., einen Punkt D (Fig. 18) zu finden, so daß $AD \cdot G = CD \cdot BD$.

Analysis.

Machet BE = G; weil AD . G = CD . BD, so folgt hieraus, daß

AD : CD = BD : BE, woraus
AC : CD = DE : BE und
AC . BE = CD . DE.

Da das Rect. AC . BE offenbar gegeben ist, so ist es eben so mit dem Rect. aus den Abschn. CD, DE, deren Unterschied CE auch bekannt ist. Folglich ist der P. D bestimmt.

Synthesis.

Nachdem man BE = G gemacht hat, so theile man CE in D so daß CD . DE = AC . BE; D ist der gesuchte Punkt.

Denn AC : CD = DE : BE, woraus
AD : CD = BD : BE und
AD . BE oder AD . G = CD . BD.

XIV. Satz.

Aufgabe.

Wenn drei Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so verlangt man, auf ihr einen vierten zu finden, so daß das Rectangel aus seiner Entfernung vom ersten Punkt und einer gegebenen Linie in einem gegebenen Verhältniß mit dem

Rectangel ſei, welches zu Seiten ſeine Entfernungen von den beiden andern Punkten haben würde.

Es iſt die Aufg., einen Punkt D zu finden (Fig. 14), ſo daß AD . G zu CD . BD wie M zu N ſei *).

Analyſis.

Nehmet eine vierte Proportionale H zu M, N, G, ſo werdet Ihr haben

AD . G : CD . BD = G : H

und folglich AD . H = CD . BD;

jetzt wird der P. D durch den vorhergehenden Satz beſtimmt ſein.

Syntheſis.

Nachdem man den P. H wie oben genommen hat, ſo ſuche man mittelſt des letzten Satzes einen P. D, ſo daß

CD . BD = AD . H;

dieſes wird der geſuchte P. ſein, weil

AD . G : AD . H oder CD . BD = G : H oder = M : N.

XV. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei Punkte auf einer geraden Linie gegeben

*) Der Leſer wird erſucht, die Fig. zu dem XIV. u. XV. Satz zu machen.

gegeben sind, so verlangt man, darauf einen vierten zu finden, so daß das Quadrat von seiner Entfernung vom ersten Punkte gleich sei dem Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden andern Punkten.

Man soll einen Punkt D (Fig. 15) finden, so daß $AD^2 = CD.BD$.

Erster Fall. Wenn der Punkt D zwischen A und B ist.

Analysis.

Weil $AD^2 = CD \cdot BD$, so folgt hieraus, daß
$CD : AD = AD : BD$, woraus
$AC : AD = AB : BD$ oder auch
$AC : AB = AD : BD$.

Aber da das Verh. von AC zu AB gegeben ist, so ist es das von AD zu BD ebenfalls; da überdem AB gegeben ist, so ist es leicht, den P. D zu bestimmen.

Synthesis.

Theilet AB in zwei Theile, die unter einander in dem Verh. von AC zu AB seien, und der Theilungsp. D wird die Bedingungen der Aufg. befriedigen.

Zweiter Fall. Wenn der Punkt D zwischen B und C ist (Fig. 15).

Analysis.

Nehmet DE = AD, und weil $AD^2 = CD \cdot BD$, so ist klar, daß CD : AD oder DE = AD : BD und folgl. CE : DE = AB : BD oder CE : AB = DE : BD = 2DE oder AE : 2BD oder auch noch CE : AB = CE + AC oder AC : AB + 2BD oder BE und folglich $CE \cdot BE = AB \cdot AC$.

Da das zweite von diesen Rect. gegeben ist, so ist es das erste gleichfalls, und weil überdem BC bekannt ist, so ist es leicht, den P. E zu bestimmen und dem zufolge den P. D, die Mitte von AE.

Synthesis.

Theilet BC in E so in zwei Theile, daß $CE \cdot BE = AB \cdot AC$ und nehmet die Mitte D von AE, so werdet Ihr alsdann haben $AD^2 = CD \cdot BD$.

In der That, weil $CE \cdot BE = AB \cdot AC$, so ist einleuchtend, daß

CE : AB = AC : BE, woraus

CE : AB = AE : 2BD oder = DE : BD.

Wenn man daher die Mittelgl. verwechselt, so erhält man CE : DE = AB : BD und folglich CD : DE oder AD = AD : BD; endlich $CD \cdot BD = AD^2$.

Dieser letzte Fall ist augensch. einer Grenze unterworfen, über welcher hinaus die Aufg. unmöglich würde; denn da das Rect. $AB \cdot AC$ durch Constr. gleich ist dem Rect. $CE \cdot BE$, so darf es den größten Werth, dessen dieses letzte Rect. fähig ist, nicht überschreiten, d. h. das Qdrt. von $\frac{1}{2}BC$. Die Grenze findet also Statt, wenn

der Punkt E mit der Mitte O von BC zusammenfällt; alsdann geschiehet es, daß

$$AB \cdot AC = BO^2$$

oder auch, daß $AB.AC+BO^2=2BO^2=AO^2$;
folgl. ist AO die Diagonale des über BO beschr. Qdrts. In diesem Falle ist

$$AB:BC=\sqrt{2}-1:2 \text{ oder } =1:2+\sqrt{8};$$

d. h. das Verhältniß von AB zu BC befindet sich im Maximum, wenn es gleich ist dem Verh. von der Hälfte der Seite eines Qdrts. zu der Summe dieser Seite und der Diagonale.

XVI. Satz.

Aufgabe.

Wenn drei Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, darauf einen vierten zu finden, so daß das Quadrat seiner Entfernung vom ersten Punkte in einem gegebenen Verhältniß mit dem Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden andern Punkten sei.

Es sei aufgegeben, einen Punkt D (Fig. 16) zu finden, so daß AD^2 zu $CD.DB$ in dem Verhältniß M zu N sei.

Erster Fall. Wenn der Punkt D zwischen A und B ist.

Ueber BC beschreibet einen Halbkr. und ziehet an ihn die Tang. DE; alsdann ist $DE^2 = CD \cdot DB$, und folgl. ist das Quadrat von AD zu dem von DE in dem gegebenen Verh. von M zu N.

Ziehet dem Halbm. EF und verl. ED bis zum Durchschnittsp. G mit einem Perpd. AG auf AC. Die so gebildeten Tr. ADG und EDF sind augensch. ähnl. und AD : DE = AG : EF; da das Verh. von AD zu DE bekannt ist, so ist es das von AG zu EF gleichfalls, und weil der Halbm. EF gegeben ist, so sind AG und der P. G gegeben; folglich ist die Tang. GE und ihr Durchschnittsp. D mit AC ebenfalls bestimmt.

Synthesis.

Nehmet zwischen M und N eine mittlere Proportionale O; beschreibet über BC einen Halbkr. und errichtet in A auf AC einen Perpd. AG von einer solchen Länge, daß man habe

$$O : M = EF : AG;$$

ziehet Ihr durch G eine Tg. GDE, so wird ihr Durchschnittsp. D mit AC der gesuchte P. sein.

In der That, wegen der Aehnlichk. der Tr. DAG und DEF hat man

$$AD : DE = AG : EF \text{ oder } = M \text{ zu } O;$$

also $AD^2 : DE^2 = M^2 : O^2$

oder auch $AD^2 : DE^2 = M : N;$

aber $DE^2 = CD \cdot DB,$

folgl. $AD^2 : CD \cdot DB = M : N.$

Zweiter Fall. Wenn der Punkt D zwischen B und C ist. (Fig. 16 bis).

Analysis.

Beschr. über BC einen Halbkr.; ziehet DF perpd. auf den Durchm., wodurch die Periph. in F geschnitten wird, und ziehet AF.

Weil $BD \cdot DC = DF^2$, so ist das Verhältniß von AD^2 zu DF^2 und folgl. das von AD zu DF bestimmt; aber der zwischen diesen Seiten enthaltene W. ADF ist gegeben, weil er ein Rechter ist, woraus folgt, daß der Tr. AFD der Art nach gegeben ist.

Also ist der W. DAF bestimmt und die gerade L. AF ist der Lage nach gegeben; es ist also eben so mit den P. F oder F′, wo sie die Periph. schneidet, mit den Perpd. FD oder ED′ und den P. D oder D′.

Synthesis.

Nehmet zwischen M und N eine mittlere Prop. O und errichtet den Perpendikel CE so, daß man habe $M : O = AC : CE$.

Ziehet nachgehends AE; durch die P. F oder F′, wo sie den über BC beschr. Halbkreis trift, fället die Perpd. FD oder F′D. Ihr werdet alsdann haben

$$M : N = AD^2 : BD \cdot DC$$
$$\text{oder} = AD'^2 : BD' \cdot D'O.$$

In der That, die augenscheinliche Aehnlichk. der Tr. ACE und ADF beweiset, daß

$$AC : CE = AD : DF$$

und daß $AC^2 : CE^2 = AD^2 : DF^2$;

aber $M : N = M^2 : O^2$ oder $= AC^2 : CE^2$;

folglich $AD^2 : DF^2 = BD \cdot DC = M : N$.

Diese Aufg. erfordert offenbar eine gewisse Relation zwischen dem Gegebenen, über welche hinaus sie unmöglich würde; diese Unmöglichk. würde Statt haben, wenn die L. AE sich so entfernte von AC, daß sie die Periph. nicht mehr erreichte. Die Grenze kommt also, wenn AE den Kr. berührt. Alsdann wird das Verh. von AC zu CE oder von AD zu DF das nämliche sein als das von der durch den P. A gezogenen Tangente zum Halbmesser HB; folgl. das Grenzverh. ist das Qdr. von diesen, d. h. das Verh. von M zu N ist, wenn diese zwei Grß. am meisten der Gleichh. nahe sind, um so mehr gl. dem Verh. von AB . AC oder von $AH^2 - HB^2$ zu HB^2.

Dritter Fall. Wenn der Punkt D über die Punkte B und C hinaus liegt. (Fig. 16ter).

Analysis.

Beschr. über BC einen Halbkr., ziehet die Tang. DE und verläng. sie, bis sie den Perpendikel AG trift; ziehet EF.

Weil $BD \cdot DC = DE^2$, so ist das Verh. von AD^2 zu DE^2 gegeben und also auch das von AD zu DE. Aber die Tr. DGA und DEF sind ähnlich, weil beide rechtw. und überdem einen W. gemein haben; also

$$AD : DE = AG : EF,$$

und weil das Verh. von AD und DE bekannt ist, so ist es eben so mit dem von AG zu EF; da EF, als die Hälfte von BC offenbar gegeben ist, so sind AG und der P. G bestimmt und dem zufolge die Tang. GE und ihr Durchschnittsp. D mit AC.

Synthesis.

Nehmet immer zwischen M und N eine mittlere Prop. O; machet überdies, daß AG zu EF sei wie M ist zu O und durch den auf solche Art bestimmten P. G ziehet die Tang. GED, so wird D der gesuchte P. sein.

Um es zu beweisen, ziehet den Halbm. EF. Da die Tr. ADG und EDF ähnlich sind, so ist

$$AG : EF = AD : ED;$$

aber $AG : EF = M : O,$

also $M : O = AD : ED$

und $M^2 : O^2 = AD^2 : ED^2,$

woraus $M : N = AD^2 : ED^2$

oder $= AD^2 : BD \cdot DC.$

XVII. Satz.

Aufgabe.

Wenn vier Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so soll man einen fünften darauf finden, so daß das Rectangel aus ihren Entfernungen von den beiden ersten in einem gegebe-

nen Verhältniß mit dem Rectangel aus ihren Entfernungen von den beiden andern sei.

Man muß einen Punkt E (Fig. 17; der Leser wird gebeten, sich diese Figur zu machen) finden, so daß AE.EB:DE.EC=M:N.

Erster Fall. Wenn M und N gleich sind.

Analysis.

Weil AE . EB = DE . EC, so ist klar, daß

AE : CE = DE : EB;

woraus AC : BD = CE : EB

oder AC+BD:BD = BC : EB;

aber das Verh. von AC+BD zu BD ist gegeben, es ist also eben so mit dem von ED zu BC; also sind AE und der P. E bestimmt.

Synthesis.

Der P. E wird der gesuchte P. sein, wenn Ihr ihn so nehmet, daß

AC+BD:BD = BC : EB.

Denn es ist klar, daß alsdann

AC : BD = CE : BE

und daß AE : ED = CE : EB,

woraus AE : EB = DE : EC.

Zweiter Fall. Wenn M und N ungleich sind.

Analysis.

Suchet durch die vorhergehende Constr. einen P. F so, daß AF . FB = DF . FC.

Weil AE.EB:DE.EC = M:N, so folgt hieraus, daß AE . EB : AE . EB — DE.EC = M:M — N; aber

AE . EB — DE . EC = (AE . EB — AF . FB)
+ (DF . FC — DE . EC *) =

EF (AF + BE) + EF (DF + CE) = EF (AD + BC).

Mithin AE.EB:EF(AD+BC) = M:M — N; folglich wird der P. E mittelst des XIV. Satzes dieses Buches, Seite 79 bestimmt sein **).

Die synth. Aufl. von dieser Aufg. ist leicht aus dem Vorherg. abzuleiten.

XVIII. Satz.

Aufgabe.

Wenn vier Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so soll man einen fünften darauf finden, so daß das Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden äußersten Punkten in einem

---

*) AE = AF + EF; BF = BE — EF;
CF = CE + EF; DE = DF — EF.

**) Die Aufg. ist auf diese zurück geführt: wenn drei P. A, B, F von einer geraden Linie gegeben sind, einen vierten P. E zu finden, so daß, wenn AE + BC = G man hätte EF . G : AE . EB = M — N : N.

gegebenen Verhältniß sei, mit dem Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden mittlern P.

Es sei aufgegeben, einen Punkt E (Fig. 18; der Leser wird ersucht diese Figur zu machen) zu finden, so daß AE.ED:BE.EC=M:N sei.

Erster Fall. Nehmet an AB=CD.

Analysis.

Wegen ED=CD+EC und AC=AB+BE+EC hat man AE.ED = (AB+BE) (AB+EC) = AB.AC +BE.EC, mithin AE . ED : AB . AC = M : M — N. Folglich ist das Verh. von AE.ED zu AB:AC gegeben und auch das Rect. von AE und ED; da übrigens diese zwei L. AE, ED die zwei Segmente von einer bekannten geraden L. AD sind, so ist klar, daß man dasjenige hat, was nöthig ist, um den P. E zu bestimmen.

Synthesis.

Nehmet M—N:M=AB:P und schneidet AD in E oder E′ so, daß

AE . ED = P . AC;

E ist der gesuchte P.

Denn durch Constr. hat man

M : M — N = P : AB,

mithin M : M — N = P . AC oder AE.ED:AB.AC, woraus erhellet, daß M:N=AE . ED : AE . ED — BA.AC oder =AE.ED:BE.EC.

Zweiter Fall. Nehmet AB und CD ungleich an. (Fig. 18).

Analysis.

Es ist klar, daß $AE.ED=(BE+AB).(EC+CD)$
$=BE.EC+BE.CD+AB.ED$; mithin
$AE.ED-BE.EC=BE.CD+ED.AB=BD.CD$
$-ED.CD+AB.ED=BD.CD+(AB-CD)ED.$
Verl. AD bis zu einem P. F, so daß
$(AB-CD)DF=BD.CD;$
dieser P. ist bekannt, weil AB, CD, BD gegeben sind. Durch diese Constr. ist
$AE.ED-BE.EC=(AB-CD)(DF+ED)$
$=(AB-CD).EF.$
Jetzt, da das Verh. von AE . ED zu BE . EC gegeben ist, so ist es eben so mit dem Verh. von AE.ED zu (AB—CD) DF; da überdem (AB — CD) so wie die P. A, C, F gegeben sind, so wird man die P. F und E mittelst des XIV. Satzes dieses 2ten Buchs S. 79 bestimmen. Mittelst dieses Satzes wird man leicht die gesuchte Constr. erhalten.

Noch bleiben die äußersten Fälle von dieser Aufg. anzuzeigen.

Zu diesem Behufe beschr. über AD (Fig. 18 bis), als Durchm. einen Kreis; errichtet die Perpd. BI und GCH; ziehet die gerade L. IOH und ziehet durch den gesuchten P. E zu ihr die Prlle. KEL; ziehet OG, EG, endlich IE, die Ihr bis zur Periph. in M verl.; verbindet endlich den P. M mit den P. L und G.

Der P. O ist offenbar gegeben. Ueberdem kann das Verh. von AE . ED zu BE . EC betrachtet werden als zusammengesetzt aus dem von AE . ED oder IE . EM zu KE . EL und aus dem von KE . EL zu BE . EC.

Jetzt, weil BK und CL prll. sind,

so ist KE : EL = BE : EC

oder KE : BE = EL : EC

und folgl. $KE^2 : BE^2 = KE . EL : BE . EC$.

Ueberdem, da KE und IO auch prll. sind,

KE : BE = IO : BO,

woraus $KE^2 : BE^2 = IO^2 : BO^2$.

Mithin $IO^2 : BO^2 = KE . EL : BE . EC$, und folgl. ist das Verh. der beiden Rect. KE . EL und BE . EC gegeb.; wir wollen annehmen, es sei gleich dem der beiden L. PQ und ST.

Da der Winkel MGL gleich MIH als in einerlei Segment eingeschrieben ist, so ist er auch gleich dem innern Winkel MEL, und folgl. ist das Vierf. MGEL einschreibbar in einem Kr., welches darthut, daß der W. LME gleich ist LGE. Ziehet die gerade L. LN unter einer Neigung MLN gleich CGO.

Die Tr. GOC und HOC sind offenbar congr.; mithin W. CGO = CHO = CLE = EKI. Folgl. sind die Tr. IEK und LEN ähnl. und

IE : KE = EL : EN,

mithin KE . EL = IE . EN.

Nehmet nachgeh. PR so daß PR : PQ = EM : EN.

Das Verh. von IE . EM zu KE . EL wird das von IE . EM zu IE . EN oder von EM zu EN; mithin ist

das Verh. von AE . ED zu BE . EC zusammengesetzt aus dem von PR zu PQ und aus dem von PQ zu ST, d. h. es ist gl. dem von PR zu ST.

Aber der Durchschnittsp. E nähere sich dem P. O, so wird offenbar der Winkel EGO oder MLN abnehmen und dem zufolge wird der P. N sich M um eine correspondirende Gtß. nähern. Also die äußerste Grenze, die PR niemals überschreiten kann, ist PQ; folgl. hat das Verh. der Rect. AE . ED und BE . EC zur Grz. das von PQ zu ST oder von IO^2 zu BO^2.

Der P. O, welcher die Grenze des Durchschnittsp. E ist, kann leicht bestimmt werden.

Weil BI und CH prll. sind, so haben wir

$$BI : CH = BO : OC \text{ und } BI^2$$

oder AB . BD : CH^2 oder

$$AC : CD = BO^2 : CO^2.$$

Um also den P. O zu erhalten, muß man BC in zwei Segm. theilen, welche im subdup. Verh. des Rect. AB . BD zu AC . CD seien, welches sich mittelst des XIV. Satzes im ersten Buche Seite 23 ausführen lassen wird.

Aber die Grenze, die wir so eben kennen lehrten, kann direkte gefunden werden. In der That, verbindet I, G und ziehet auf dieser L. den Perpd. DV; ziehet nachgeh. DG, DI, CV und BV und, nachdem Ihr den Durchm. IZ gezogen habt, so verb. Z mit G. Da die W. DGC und DIV jeder die Hälfte vom Bog. DH oder von dem ihm gl. GD zum Maaße haben, so sind sie gleich; ferner sind die Vierseite BIVD und GCVD einschreibbar in einem Kr., weil ihre Gegenwinkel B,

V, und C, V Rechte sind; daher ist der W. DGC gl. DVC und DIV ist gleich DBV; folgl. sind die Winkel DVC und DBV gleich.

Es gehet hieraus hervor, daß die Tr. CDV und VDB ähnlich sind, weil sie außerdem noch einen W. gemein haben; also

$$BD : DV = DV : DC$$

und $BD \cdot DC = DV^2$.

Aber, auf der andern Seite

$$DG^2 = AD \cdot DC, \text{ folglich}$$

$DG^2 - DV^2$ oder $GV^2 = AD \cdot DC - BD \cdot DC = AB \cdot DC$.

Auf dieselbe Weise ist es sichtbar, daß

$$IV^2 = AC \cdot BD.$$

Folglich ist die Entfernung IG bestimmt, weil sie die Differenz zwischen den Seiten von zwei Qdrt. ist, die respective gleich dem Rect. AC . DB, AB . DC.

Ferner, da der W. BIO gleich GHI, so ist er auch gleich GZI; und da auch der rechte W. OBI gleich ist IGZ, so folgt hieraus, daß die Tr. IOB und ZIG ähnl. sind und daß

$$IO : BO = IZ \text{ oder } AD : IG.$$

Also die Grenze des Verhältnisses von AE . ED zu BE . EC d. h. der Werth dieses Verh. im Zustande des Minimums ist gleich dem Quadrat des Verhältnisses von AD zu der Differenz der Seiten der zwei Quadrate, die respective gleich dem Rect. AC . DB und AB . DC.

XIX. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so ziehen, daß der zwischen einer gegebenen Kreisperipherie enthaltene Theil gleich einer gegebenen Linie sei.

Es sei A (Fig. 19) ein Punkt, durch welchen man eine gerade Linie HI ziehen muß, die an der Peripherie begrenzt und gleich B sei.

Analysis.

Man weiß, daß in einem Kreise alle gleiche Sehnen gleich weit vom Mittelp. abstehen; wenn man also eine Sehne DE gleich B einschreibt, so ist klar, daß die gesuchte Sehne von dem Mittelp. um eine Grß. gleich CF entfernt sein muß. Folglich muß diese Sehne eine Tg. an der Peripherie des aus dem Mittelp. C mit dem Halbm. CF beschr. Kr. sein. Da der P. A gegeben ist, so ist also die Tang. AG an diesem Kreise bekannt und HI ist bestimmt.

Synthesis.

Traget eine Sehne DE gleich B ein und fället auf diese Sehne den Perpendikel CF und mit CF als Halbm. beschr. einen concentrischen Kr. zu dem gegebenen Kreis; die Tang. HAI zu diesem Kreise ist die gesuchte

gerade L.; denn es leuchtet ein, daß, da die Sehnen HI u. DE gleich weit vom Mittelp. liegen, sie jede gleich B sind *).

XX. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, so daß der zwischen zwei gegebenen concentrischen Kreis-Peripherieen enthaltene Theil von gegebener Länge sei.

Es werde verlangt (Fig. 20), durch A eine gerade L. ABC zu ziehen, so daß der zwischen den beiden concentrischen Peripherieen HECM und IFBL begriffene Theil gleich D sei.

Ana-

*) Diese Aufgabe ist eines Minimums fähig, welches leicht zu erhalten ist, d. h. man kann leicht die übrigen Constr. finden, damit die Sehne HI die kleinst mögliche sei. In der That, damit HI ein Minimum sei, so muß GC ein Maximum sein; nun kann GC niemals grß. als AC oder ihr gl. werden; folgl. findet das Maxim. von GC u. das Minimum von HI Statt, wenn der P. G mit A zusammenfällt d. h. wenn die gesuchte Sehne perpend. auf AC ist, welche eine gegebene gr. L. ist.

(Der franz. Uebersetzer).

Analysis.

Durch einen bel. in einer der gegebenen Peripherieen genommenen P. H ziehet die Sehne HM = EC und fället auf die gerade L. den Perpend. OK und OG. Die gleichen Sehnen HM und EC sind gleich weit vom Mittelp. und nach der umgekehrten Eigenschaft ist IL gleich BF; folglich sind die Hälften dieser L. gl. d. h. HK = GC und IK = GB; also ist HI gleich BC und ist also gegeben. Es folgt hieraus, daß der P. I und die Sehne HM gleichfalls bestimmt sind; es ist folglich eben so mit der gr. L. AGC, die den Kr. OKG berühret, an welchem HM Tang. ist.

Synthesis.

Durch einen beliebigen auf einer der Periph. genommenen P. H ziehet eine gerade L. HIM so, daß der Theil HI gleich D sei. Fället auf diese gerade L. den Perpd. OK und nehmt Ihr OK als Halbm., so beschreibet aus O einen Kr. an, welchen Ihr die Tg. ABC ziehet; diese Tang. wird den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Denn die Sehnen EC und FB sind respect. gleich den Sehnen HM und IL, die gleich weit vom Mittelp. sind; folgl. sind ihre Hälften gl. d. h. GC = HK und GB = IK, woraus BC = HI = D.

Es ist einleuchtend, daß der Raum BC zwischen den beiden concentrischen Kreisperipherieen sein Minimum haben wird, wenn AC durch den Mittelp. O gehen wird, und sein Maximum; wenn AC Tang. am

innern Kreis sein wird. Die gegebene L. D liegt also zwischen zwei Grz.; sie kann nicht größer als die Quadratwurzel aus der Differenz der Quadrate dieser Halbmesser sein.

XXI. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei beliebige Kreise gegeben sind und ein Punkt auf der geraden Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, so daß die Entfernungen dieses Punktes von den Mittelpunkten der Kreise ihren Halbmessern proportional seien, so verlangt man eine andere gerade Linie zu ziehen, von welcher der zwischen den beiden Peripherieen enthaltene Theil eine gegebene Länge habe.

Es seien D, E (Fig. 21) die Mittelpunkte der beiden Kreise und nehmet an, daß der Punkt A der geraden Linie DE so liege, daß man habe AD : AE = DI : EK; man verlangt, durch diesen Punkt A die gerade Linie ABC zu ziehen, so daß BC gleich L sei.

Analysis.

Ziehet BD und CE. Weil AD : AE = DI oder DB : EK oder EC, so folgt hieraus, daß DB pril- zu

EC ist; folgl. AD : DE = AB : BC; und weil AD u. DE wie auch BC gl. L. gegeben sind, so folgt hieraus, daß AB sowohl der Lage als der Größe nach bestimmt ist.

Synthesis.

Nehmet eine L. M, so daß

EK — DI : DI = L : M

und ziehet durch A die AB gleich M, so ist ABC die gesuchte gr. L.

Denn nach der Hypothese ist

AD : AE = DI oder DB : EK oder EC;

also ist DB parll. zu EC und folglich

DB oder DI : EC oder EK = AB : AC

also EK — DI : DI = BC : AB;

aber EK — DI : DI = L : M oder = L : AB;

folglich endlich BC : AB = L : AB;

woraus folgt, daß BC = L.

XXII. Satz.

Aufgabe.

Wenn zwei Kreise, davon der eine innerhalb des andern liegt, gegeben sind, durch einen in der Peripherie des kleinern und in der durch beide Mittelpunkte gehenden geraden Linie befindlichen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, so daß

der zwischen den beiden Peripherieen enthaltene Theil von einer gegebenen Länge sei.

Man soll die gerade Linie ABC ziehen so, daß der zwischenliegende Theil BC gleich QR sei.

Analysis.

Ziehet BG, CH, und FP und durch dem Mittelp. des größten Kreises fället auf AC den Perpd. EI; nehmet nachgehends IL = BI und führet IK prll. zu BG. Auf die Verl. von AH traget eine vierte Proportionale AM zu AK, AG, AF und ziehet durch M die MN prll. zu FP, welche die Verläng. von AC in N treffen wird.

Da LK prll. zu BG u. FP zu MN, so folgt, daß

AK : AG = AL : AB

und AF : AM = AP : AN;

aber, durch Constr.,

AK : AG = AF : AM,

also AK : AG = AL : AB = AP : AN.

Es folgt hieraus, daß

AK : AG = AL + AP oder PL : AB + AN oder BN.

Aber IP = IC und IL = IB, also

PL = BC = QR.

Wegen des Parallelismus der geraden L. LK, IE und BG ist KE gleich EG und folgl. ist AK gegeben; es ergiebt sich hieraus, daß, da die drei ersten Gl. der Prop. bestimmt sind, das vierte oder BN es ebenfalls ist. Aber überdem W. ACH = AFP = AMN; mithin sind die

Tr. CAH und ANM, die außerdem einen gemeinsch. W. haben, ähnlich; folgl.

$$AH : AC = AN : AM$$

und $AH \cdot AM = AC \cdot AN$.

Man sieht aus diesem letzten Resultate, daß man das Rect. aus den Segm. AN, AC kennt, in welche die schon bestimmte L. CN getheilt ist; folgl. ist AC sowohl der Lage als der Größe nach bekannt.

Synthesis.

Nachdem KE = EG genommen worden, so traget von A in M eine vierte Proport. zu AK, AG und AF, nehmet zwei L. QR, QS, die unter sich in dem Verh. von AK zu AG seien. Theilet in O die SR in zwei Segm., so daß $SO \cdot OR = AH \cdot AM$ u. ziehet endlich durch den gegeb. P. A bis zur Periph. des größten Kr. eine gr. L. AC = OR; dieses wird die verlangte L. sein.

Um es zu beweisen, ziehet CH, BG und FP, führet MN prll. zu FP und EI, KL prll. zu CH. Weil IL = IB und IP = IC, so ist PL gl. BC. Die Tr. CAH und ANM sind ähnlich und folglich

$$AH : AC = AN : AM;$$

woraus $AH \cdot AM = AC \cdot AN$;

aber durch Constr. ist

$$AH \cdot AM = SO \cdot OR \text{ und } AC = OR,$$

also $AN = SO$.

Jetzt, wegen der Eigenschaft der Prllen. ist

$$AK : AG = AL : AB$$

und durch Hypothese

AK : AG = AF : AM oder = AP : AN,
mithin AK : AG = (AL + AB)
oder BC : (AN + AB) oder BN.
Es folgt hieraus, daß
BC : BN = QR : QS
und daß BC : CN = QR : RS;
aber CN = SR,
also BC = QR
d. h. die gegebene Linie.

XXIII. Satz.

Aufgabe.

Aus dem Endpunkte des Durchmessers von einem gegebenen Kreise eine gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen der Peripherie und einem Perpendikel auf diesem Durchmesser enthaltene Theil von einer gegebenen Länge sei.

Es wird verlangt, durch A (Fig. 23) die gr. L. AC so zu ziehen, daß der Theil BC gleich GH sei.

Analysis.

Ziehet BD. Da der W. ABD seinen Scheitel in der Peripherie und seine Endp. in der eines Durchm. hat, so ist er ein Rechter und ist folgl. gl. W. AEC. Also sind die Tr. DAB u. CAE, welche außerdem einen W. gemein haben, ähnl. und daher

AB : AD = AE : AC,
also AB . AC = AD . AE.

ber das Rect. AD . AE ist bekannt, also ist es eben mit AB . AC; und weil überdem BC gegeben ist, findet sich AB der Grß. nach bestimmt und folglich ch der Lage nach.

Synthesis.

Verl. GH um eine Grß. HI, so daß
GI . IH = AD . AE
traget in den Kr. eine Sehne AB gleich IH; dieses rd die gesuchte gr. L. sein. Denn, wenn Ihr BD het, so wird Euch die einleuchtende Aehnlichkeit der fangel ABC und AEC die Prop.
AB : AD = AE : AC liefern,
raus Ihr die Gleich.
AB . AC = AD . AE = GI . IH
leitet; aber AB = IH, also AC = GI und BC = GH.

XXIV. Satz.

Aufgabe.

Durch einen in einer geraden Linie, welche nen Winkel halbirt, gegebenen Punkt eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen n beiden Schenkeln des Winkels enthaltene heil von gegebener Länge sei.

Durch den Punkt D (Fig. 24), welcher auf AD liegt, die den Winkel ABC halbirt, soll man BC gleich einer gegebenen Linie ziehen.

Analysis.

Leget durch die drei P. A, B, C einen Kreis, ziehet den Durchm. EF und die gerade L. AF. Es ist klar, daß dieser Kr. und folgl. der Tr. BAC der Grß. nach gegeb. sind, weil man BC u. den W. BAC giebt; man wird diese Grß. finden, indem man über BC ein des W. BAC fähiges Kreissegm. beschr.; aber, weil der W. BAE gleich CAE, so ist der Bog. BE gleich CE, und der Durchm. EF fällt perpend. auf die Mitte von CB. Da AD gegeben ist, so ist AE durch den letzten Satz der Grß. nach bestimmt, folglich ist DB in Grß. und auch in Lage bekannt.

Synthesis.

Ueber die gegebene L. beschr. einen des W. BAC fähigen Kreis.; halbirt den Bog. BC in E und ziehet durch diesen P. mittelst des letzten Satzes die gerade L. EAD so, daß AD gleich der Entfernung des gegebenen P. vom Scheitel des gegebenen W. sei. BD, CD werden die zwei Segm. der verl. geraden L. sein, durch deren Hülfe ihre Lage unmittelbar bestimmt ist.

Denn der W. BAC ist gleich dem gegebenen W., und AD halbirt ihn, weil der Bog. BE = CE; überdem ist AD gleich der Entfernung des gegebenen P.

vom Scheitel des Tr. und BC ist der gegebenen L. gl. In der so constr. Fig. hat man also allen Bedingungen der Aufg. Genüge geleistet.

Man begreift, daß diese Aufgabe nothwendig einer Grz. fähig ist; denn es ist einleuchtend, daß die gegebene L. BC so klein sein könnte, daß sie den Schenkel des W. BAC nicht erreichte. Die vorhergeh. Constr. deutet wohl das Minimum von BC an. Denn EA kann niemals den Durchm. EF übertreffen, und die Grz. findet Statt, wenn diese zwei L. zusammen fallen; es ist also BC ein Minimum, wenn sie perpd. auf AD ist; man kann alsdann bemerken, daß die Abschnitte BD, CL gleich sind.

XXV. Satz.

Aufgabe.

Durch den Scheitel eines Rhombus eine gerade Linie zu ziehen, so daß der Theil zwischen den beiden Seiten, der sie begegnet, von einer gegebenen Länge sei.

Es sei ABCD (Fig. 25) ein Rhombus, dessen Seite BC verlängert ist; man soll durch den entgegengesetzten Scheitel A die gerade Linie AEF so ziehen, daß der äußere Theil EF gleich einer gegebenen geraden Linie sei.

Analysis.

Ziehet AC und verlängt. solche, bis sie EG, die mit AE einen W. AEG gleich ACF macht, trift. Die Tr. CAF und EAG sind einleuchtend ähnl. und also

$$AC : CF = AE : EG;$$

da aber CE perl. zu AB, so ist

$$BC : CF = AE : EF;$$

mithin $AC : BC = EF : EG$,

und weil die drei ersten Gl. von dieser Prop. gegeben sind, so ist das vierte bestimmt.

Ferner ist W. ACD gleich ACB oder FCG; setzt man zu jedem dieser W. den W. ECF zu, so sind die Summen ACF oder AEG und ECG gleich. Also sind die Tr. AGE und EGC ähnl. und

$$AG : EG = EG : GC$$

oder $EG^2 = AG \cdot GC$.

Da EG oben bestimmt worden, so ist es das Rect. AG . GC auch; u. eben so es ist auch mit dem P. G, dem P. E und der geraden L. AF.

Synthesis.

Angenommen, es sei das gegebene Segm. gl. K; ziehet AC und nehmet eine vierte Proportionallinie L zu AC, BC, K. Nachgehends theilet AC in G in zwei Theile, so daß $AG \cdot GC = L^2$, und aus G mit dem Halbm. $GE = L$; beschreibet einen Kreisbogen, der CD in E schneidet; so wird AEF die gesuchte gr. L. sein.

Denn, weil $AG \cdot GC = L^2 = EG^2$, so folgt hieraus, daß $AG : EG = FG : CG$, welches beweist,

ß die Tr. AGE und EGC ähnl. sind und daß folgl.
r W. AEG gleich ECG oder ACF ist; mithin sind
: Tr. AFC und AGE ebenfalls ähnlich und

AC : CF = AE : EG,

ber auf der andern Seite

BC : CF = AE : EF;

also AC : BC = EF : EG.

lan hat aber auch AC : BC = K : L;

folglich K = EF.

Andere Auflösung.

Analysis.

Ziehet FG (Fig. 25 bis), so daß sie den W. AFG
eich ADC macht, nehmet CH = CE, durch C ziehet
N = CA, und ziehet CG und AH.

Da der Tr. ACN gleichschenklig ist, so ist W. CAN
ngr. CNA; und weil die Diagon. AC den W. BCE
s Rhombus halbirt, so sind die Tr. ACE und ACH
ngr.; woraus hervorgeht, daß AE gleich AH und der
. CAE gleich CAH ist.

Weil die Tr. ADE und AFG ähnlich sind, so ist

AD : AE = AF : AG

und AD . AG = AE . AF.

ber der W. ACD = CAD = CNA, also sind die
r. ADC und ACN ähnlich und

AN : AC = AC : AD, woraus

$AN \cdot AD = AC^2$.

Ueberdem, weil AC den W. HAF halbirt *), so ist

$$FA \cdot AH = AC^2 + FC \cdot CH$$

oder auch $FA \cdot AE = AC^2 + FC \cdot CE$; mithin

$$FC \cdot CE = FA \cdot AE - AC^2 = AG \cdot AD - AD \cdot NA$$
$$= NG \cdot AD.$$

Aber da BA und CE prll. sind, so ist

$$FC : EF = AD : AE = AF : AG$$

und CE : EF = AB oder AD : AF; folglich

$$FC \cdot CE : EF^2 = AD : AG = NG \cdot AD : NG \cdot AG,$$

und da $FC \cdot CE = NG \cdot AD$,

so folgt hieraus, daß $EF^2 = NG \cdot AG$. Durch diese letzte Gleich. ist es sichtbar, daß AG und der P. G bestimmt sind. Wenn man daher über AG ein Kreissegment beschreibt, welches den W. AFG = ADC enth., so wird sich der P. F in dem Bogen dieses Segments finden; der Durchschn. dieses Bogens mit BC wird die Lage des P. F kennen lehren und dem zufolge auch die gr. Linie AF.

Synthesis.

Es sei K die Grß. des gegebenen Abschn. Suchet eine gr. L. L, deren Qdrt. gleich sei der Summe der Qdrt. von K und der Diag. AC; perl. AD und durch C ziehet CG = L. Ueber AB beschreibet einen des W.

---

*) Wegen der ähnl. Tr. ABD, ACE (Fig. 24) hat man

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD \cdot DE + AD^2;$$

aber $AD \cdot DE = BD \cdot DC$; folgl.

$$AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2.$$

ADC fähigen Kreisabschnitt verbindet A mit F, wo der Kreisabschn. CB trift, so ist AF die gesuchte L.

Um es zu beweisen, ziehet CN = CA und ziehet GF und AH. Die Tr. AHC und AEC, sind congr. In der That, da der W. AFG durch Constr. gleich ADC, so ist er auch gl. dem W., den die Berl. von BA mit AD bildet; und folglich berührt AB den Kreis in A; mithin ist der W. BAH = HFA = DAE und BAC — BAH oder CAH = DAC — DAE oder CAE. Ueberdem sind die W. ACH und ACE auch gleich und die Seite AC ist beiden Tr. CAH, CAE gemein. Also ist die Congr. dieser Tr. erwiesen und es ergiebt sich hieraus, daß AH = AE u. CH = CE.

Auf der andern Seite sind die Tr. ADE u. AFG ähnl.; daher AD : AE = AF : AG und AD : AG = AE : AF. Nachgehends wegen der Aehnlichk. der Tr. ANC und ACD ist

AN : AC = AC : AD und AN . AD = AC^2.

Aber FC : EF = AD : AE = AF : AG

und CE : EF = AB oder AD : AF, folglich

FC . CE : EF^2 = AD : AG = NG . AD : NG . AG.

Übrigens, weil AC den W. FAH halbirt, so ist,

FC . CH + AC^2 = FA . AH =

AG . AD = AN . AD + NG . AD.

Hieraus folgt, daß FC . CH oder

FC . CE = NG . AD und EF^2 = NG . AG.

Jetzt K^2 = CG^2 — AC^2 = NG . AG.

(Siehe die Note auf Seite 52); folgl. EF = K *).

*) Pappus, Geometer aus der Mitte des vierten

XXVI. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Es werde verlangt, einen Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte A, B (Fig. 26) geht und die Linie CD berührt.

Es können sich offenbar zwei Fälle darbieten; der, wo die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte parallel ist und der, wo sie zu CD geneigt ist.

Erster Fall. AB parallel zu CD.

Jahrhunderts, hat uns die Titel der acht Abtheilungen von der Geometrie der Griechen übergeben u. die Aufg. der fünften Abtheilung genannt: de inclinationibus, welche Elementar-Constr. zulassen und sich mittelst der vorherg. Sätze XIX. bis XXV. Seite 95 bis 105 auflösen. Die erste Aufl. ist entlehnt aus der geom. Analysis von Omèrique Hugo de San Lucar (vide analysin geometricam, partem primam de planis, quatuor libros, Cadix 1698); und die zweite ist aus des berühmten Huygens hinterlassenen Werken. Die Auflösung der allgemeinen Aufg. erfordert die Anwendung der Eigensch. von der Conchoide.

Analysis.

Weil CD eine Tangente ist, so läuft der durch den Berührungsp. gehende Perpd. durch den Mittelp.; er halbirt also die AB, welche zu CD parll. ist.

Es erhellet hieraus, daß dieser Perpd. und folglich der Berührungsp. E bestimmt sind; also ist der Kreis, welcher durch die Punkte A, B und E gehen wird, der gesuchte Kreis.

Synthesis.

Ziehet GE perpend. auf die Mitte von AB und durch die drei P. A, E, B leget einen Kreis: er wird die L. CE berühren.

Denn GE gehet durch den Mittelp. des Kr. und halbirt überdem CD unter rechten W.

Zweiter Fall. AB ist gegen CD geneigt (Fig. 26 bis).

Analysis.

Verl. BA, bis CD in F getroffen wird. Alsdann ist $FE^2 = AF \cdot FB$; da aber der Treffp gegeben ist, so ist das Rect. AF . FB bestimmt, folglich hat man auch E und den P. E. Es wird also hinreichen, einen Kreis durch A, B und E gehen zu lassen.

Synthesis.

Verl. BA, bis CD in F getroffen wird. Traget auf CD von F aus eine mittlere Proportionale FE oder

XXVI. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Es werde verlangt, einen Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte A, B (Fig. 26) geht und die Linie CD berührt.

Es können sich offenbar zwei Fälle darbieten; der, wo die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte parallel ist und der, wo sie zu CD geneigt ist.

Erster Fall. AB parallel zu CD.

Jahrhunderts, hat uns die Titel der acht Abtheilungen von der Geometrie der Griechen übergeben u. die Aufg. der fünften Abtheilung genannt: de inclinationibus, welche Elementar-Constr. zulassen und sich mittelst der vorherg. Sätze XIX. bis XXV. Seite 95 bis 105 auflösen. Die erste Aufl. ist entlehnt aus der geom. Analysis von Oma[illegible] Hugo de San Lucar (vide anal[illegible] primam de planis, quatuor[illegible] zweite ist aus des berühmt[illegible] ken. Die Auflösung [illegible] Anwendung der Fig[illegible]

FE′ zwiſchen AF und FB und durch die P. A, E, B leget einen Kreis; er wird die gerade L. CD berühren.

Denn, weil AF : FE = FE : FB,

ſo folgt hieraus, daß

$$FE^2 = AF \cdot FB;$$

folgl. berührt CD den Kreis in E.

XXVII. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Es werde verlangt, einen Kreis zu beſchreiben, der durch den Punkt E (Fig. 27) geht und die gerade Linie AB und CD berührt.

Erſter Fall. Angenommen, AB ſei parallel zu CD.

Analyſis.

Durch den P. O ziehet die Perl. FO und den Perpendikel KI zu den beiden gegebenen geraden L. Es iſt einleuchtend, daß der Halbm. OI gegeben iſt und folgl. iſt die Lage von OF auch gegeben; da aber der Halbm. OE oder OE′ gleich OI, ſo ſind der Halbmeſſer und der Mittelp. O gleichfalls beſtimmt.

Syn-

Synthesis.

Ziehet eine Prll. FO durch die Mitte der Entfer-ung zwischen den beiden gegebenen gr. L. und aus dem). E mit einem Halbm. gl. der Hälfte dieser Entfer-ung beschreibet einen Kreisbogen, welcher FO in O der O′ trift, so ist dieser P. der Mittelp. des gesuchten reises.

Denn OE = OI = OK und folglich muß der durch gehende Kreis die CD und AB in K und I berühren.

Zweiter Fall. Angenommen, CD sei schief AB (Fig. 27 bis).

Analysis.

Verl. die beiden gegeb. gr. L., bis sie in F zusam-enstoßen; ziehet OI, OK und OF und ziehet durch die L. EGH perpd. auf FO.

Die rechtw. Tr. OKF u. OIF sind congr., weil die S. OF ihnen gemein u. die S. OI gl. OK ist; u. da der). F gegeb. ist, so folgt hieraus, daß die L. OF bestimmt ist.

Ueberdem aber ist der P. E gegeben, daher ist dies auch der Fall mit dem Perpd. EG, und da GH gl. E, so ist klar, daß der P. H bestimmt ist. Jetzt, da wir zwei P. H und E haben, durch welche der Berüh-ungskr. zu AB und CD gehen muß, so könnte er nach dem vorherg. Satze beschrieben werden.

Synthesis.

Verl. BA und CD bis zu ihrem Treffp. in F, zie-

Durch den Punkt D (Fig. 24), welcher auf AD liege, die den Winkel ABC halbirt, soll man BC gleich einer gegebenen Linie ziehen.

Analysis.

Leget durch die drei P. A, B, C einen Kreis, ziehet den Durchm. EF und die gerade L. AF. Es ist klar, daß dieser Kr. und folgl. der Tr. BAC der Grß. nach gegeb. sind, weil man BC u. den W. BAC giebt; man wird diese Grß. finden, indem man über BC ein des W. BAC fähiges Kreisſegm. beſchr.; aber, weil der W. BAE gleich CAE, ſo iſt der Bog. BE gleich CE, und der Durchm. EF fällt perpend. auf die Mitte von CB. Da AD gegeben iſt, ſo iſt AE durch den letzten Satz der Grß. nach beſtimmt, folglich iſt DB in Grß. und auch in Lage bekannt.

Syntheſis.

Ueber die gegebene L. beſchr. einen des W. BAC fähigen Kreis.; halbirt den Bog. BC in E und ziehet durch dieſen P. mittelſt des letzten Satzes die gerade L. EAD ſo, daß AD gleich der Entfernung des gegebenen P. vom Scheitel des gegebenen W. ſei. BD, CD werden die zwei Segm. der verl. geraden L. ſein, durch deren Hülfe ihre Lage unmittelbar beſtimmt iſt.

Denn der W. BAC iſt gleich dem gegebenen W., und AD halbirt ihn, weil der Bog. BE = CE; überdem iſt AD gleich der Entfernung des gegebenen P.

vom Scheitel des Tr. und BC ist der gegebenen L. gl. In der so constr. Fig. hat man also allen Bedingungen der Aufg. Genüge geleistet.

Man begreift, daß diese Aufgabe nothwendig einer Grz. fähig ist; denn es ist einleuchtend, daß die gegebene L. BC so klein sein könnte, daß sie den Schenkel des W. BAC nicht erreichte. Die vorhergeh. Constr. deutet wohl das Minimum von BC an. Denn EA kann niemals den Durchm. EF übertreffen, und die Grz. findet Statt, wenn diese zwei L. zusammen fallen; es ist also BC ein Minimum, wenn sie perpd. auf AD ist; man kann alsdann bemerken, daß die Abschnitte BD, CD gleich sind.

XXV. Satz.

Aufgabe.

Durch den Scheitel eines Rhombus eine gerade Linie zu ziehen, so daß der Theil zwischen den beiden Seiten, der sie begegnet, von einer gegebenen Länge sei.

Es sei ABCD (Fig. 25) ein Rhombus, dessen Seite BC verlängert ist; man soll durch den entgegengesetzten Scheitel A die gerade Linie AEF so ziehen, daß der äußere Theil EF gleich einer gegebenen geraden Linie sei.

Analyſis.

Ziehet AC und verlängt. ſolche, bis ſie EG, die mit AE einen W. AEG gleich ACF macht, trift. Die Tr. CAF und EAG ſind einleuchtend ähnl. und alſo

$$AC : CF = AE : EG;$$

da aber CE parll. zu AB, ſo iſt

$$BC : CF = AE : EF;$$

mithin $AC : BC = EF : EG$,

und weil die drei erſten Gl. von dieſer Prop. gegeben ſind, ſo iſt das vierte beſtimmt.

Ferner iſt W. ACD gleich ACB oder FCG; ſetzt man zu jedem dieſer W. den W. ECF zu, ſo ſind die Summen ACF oder AEG und ECG gleich. Alſo ſind die Tr. AGE und EGC ähnl. und

$$AG : EG = EG : GC$$

oder $EG^2 = AG \cdot GC$.

Da EG oben beſtimmt worden, ſo iſt es das Rect. AG . GC auch; u. eben ſo es iſt auch mit dem P. G, dem P. E und der geraden L. AF.

Syntheſis.

Angenommen, es ſei das gegebene Segm. gl. K; ziehet AC und nehmet eine vierte Proportionallinie L zu AC, BC, K. Nachgehends theilet AC in G in zwei Theile, ſo daß $AG \cdot GC = L^2$, und aus G mit dem Halbm. GE = L; beſchreibet einen Kreisbogen, der CD in E ſchneidet; ſo wird AEF die geſuchte gr. L. ſein.

Denn, weil $AG \cdot GC = L^2 = EG^2$, ſo folgt hieraus, daß $AG : EG = EG : CG$, welches beweiſt,

daß die Tr. AGE und EGC ähnl. sind und daß folgl. der W. AEG gleich ECG oder ACF ist; mithin sind die Tr. AFC und AGE ebenfalls ähnlich und

$$AC : CF = AE : EG.$$

Aber auf der andern Seite

$$BC : CF = AE : EF;$$

also $AC : BC = EF : EG.$

Man hat aber auch $AC : BC = K : L;$

folglich $K = EF.$

Andere Auflösung.

Analysis.

Ziehet FG (Fig. 25 bis), so daß sie den W. AFG gleich ADC macht, nehmet $CH = CE$, durch C ziehet $CN = CA$, und ziehet CG und AH.

Da der Tr. ACN gleichschenklig ist, so ist W. CAN congr. CNA; und weil die Diagon. AC den W. BCE des Rhombus halbirt, so sind die Tr. ACE und ACH congr.; woraus hervorgeht, daß AE gleich AH und der W. CAE gleich CAH ist.

Weil die Tr. ADE und AFG ähnlich sind, so ist

$$AD : AE = AF : AG$$

und $AD \cdot AG = AE \cdot AF.$

Aber der W. $ACD = CAD = CNA$, also sind die Tr. ADC und ACN ähnlich und

$$AN : AC = AC : AD, \text{ woraus}$$

$$AN \cdot AD = AC^2.$$

Ueberdem, weil AC den W. HAF halbirt *), so ist

$$FA \cdot AH = AC^2 + FC \cdot CH$$

oder auch $FA \cdot AE = AC^2 + FC \cdot CE$; mithin

$$FC \cdot CE = FA \cdot AE - AC^2 = AG \cdot AD - AD \cdot NA$$
$$= NG \cdot AD.$$

Aber da BA und CE prll. sind, so ist

$$FC : EF = AD : AE = AF : AG$$

und $CE : EF = AB$ oder $AD : AF$; folglich

$$FC \cdot CE : EF^2 = AD : AG = NG \cdot AD : NG \cdot AG,$$

und da $FC \cdot CE = NG \cdot AD$,

so folgt hieraus, daß $EF^2 = NG \cdot AG$. Durch diese letzte Gleich. ist es sichtbar, daß AG und der P. G bestimmt sind. Wenn man daher über AG ein Kreissegment beschreibt, welches den W. $AFG = ADC$ enth., so wird sich der P. F in dem Bogen dieses Segments finden; der Durchschn. dieses Bogens mit BC wird die Lage des P. F kennen lehren und dem zufolge auch die gr. Linie AF.

Synthesis.

Es sei K die Grß. des gegebenen Abschn. Suchet eine gr. L. L, deren Qdrt. gleich sei der Summe der Qdrt. von K und der Diag. AC; verl. AD und durch C ziehet $CG = L$. Ueber AB beschreibet einen des W.

*) Wegen der ähnl. Tr. ABD, ACE (Fig. 24) hat man

$$AB \cdot AC = AD \cdot AE = AD \cdot DE + AD^2;$$

aber $AD \cdot DE = BD \cdot DC$; folgl.

$$AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2.$$

DC fähigen Kreisabſchnitt verbindet A mit F, wo
: Kreisabſchn. CB trift, ſo iſt AF die geſuchte L.

Um es zu beweiſen, ziehet CN = CA und ziehet
F und AH. Die Tr. AHC und AEC ſind congr.
n der That, da der W. AFG durch Conſtr. gleich ADC,
iſt er auch gl. dem W., den die Verl. von BA mit AD
ldet; und folglich berührt AB den Kreis in A; mithin
der W. BAH = HFA = DAE und BAC — BAH
er CAH = DAC — DAE oder CAE. Ueberdem ſind
e W. ACH und ACE auch gleich und die Seite AC
: beiden Tr. CAH, CAE gemein. Alſo iſt die Congr. die-
r Tr. erwieſen und es ergiebt ſich hieraus, daß AH
AE u. CH = CE.

Auf der andern Seite ſind die Tr. ADE u. AFG
hnl.; daher AD : AE = AF : AG und AD : AG
= AE : AF. Nachgehends wegen der Aehnlichk. der
r. ANC und ACD iſt

AN : AC = AC : AD und AN . AD = AC^2.

ber FC : EF = AD : AE = AF : AG

nd CE : EF = AB oder AD : AF, folglich

C . CE : EF^2 = AD : AG = NG . AD : NG . AG.

Uebrigens, weil AC den W. FAH halbirt, ſo iſt,

FC . CH + AC^2 = FA . AH =
AG . AD = AN . AD + NG . AD.

Hieraus folgt, daß FC . CH oder
FC . CE = NG . AD und EF^2 = NG . AG.
Jetzt K^2 = CG^2 — AC^2 = NG . AG.
(Siehe die Note auf Seite 52); folgl. EF = K *).

*) Pappus, Geometer aus der Mitte des vierten

XXVI. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt.

Es werde verlangt, einen Kreis zu beschreiben, der durch die Punkte A, B (Fig. 26) geht und die Linie CD berührt.

Es können sich offenbar zwei Fälle darbieten; der, wo die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte parallel ist und der, wo sie zu CD geneigt ist.

Erster Fall. AB parallel zu CD.

Jahrhunderts, hat uns die Titel der acht Abtheilungen von der Geometrie der Griechen übergeben u. die Aufg. der fünften Abtheilung genannt: de inclinationibus, welche Elementar-Constr. zulassen und sich mittelst der vorherg. Sätze XIX. bis XXV. Seite 95 bis 105 auflösen. Die erste Aufl. ist entlehnt aus der geom. Analysis von Omèrique Hugo de San Lucar (vide analysin geometricam, partem primam de planis, quatuor libros, Cadix 1698); und die zweite ist aus des berühmten Huygens hinterlassenen Werken. Die Auflösung der allgemeinen Aufg. erfordert die Anwendung der Eigensch. von der Conchoide.

Analysis.

Weil CD eine Tangente ist, so läuft der durch den Berührungsp. gehende Perpd. durch den Mittelp.; er albirt also die AB, welche zu CD pall. ist.

Es erhellet hieraus, daß dieser Perpd. und folglich r Berührungsp. E bestimmt sind; also ist der Kreis, elcher durch die Punkte A, B und E gehen wird, der esuchte Kreis.

Synthesis.

Ziehet GE perpend. auf die Mitte von AB und urch die drei P. A, E, B leget einen Kreis: er wird e L. CE berühren.

Denn GE gehet durch den Mittelp. des Kr. und hneidet überdem CD unter rechten W.

Zweiter Fall. AB ist gegen CD geneigt Fig. 26 bis).

Analysis.

Verl. BA, bis CD in F getroffen wird. Alsdann t $FE^2 = AF \cdot FB$; da aber der Treffp gegeben ist, so t das Rect. AF . FB bestimmt, folglich hat man auch E und den P. E. Es wird also hinreichen, einen Kreis urch A, B und E gehen zu lassen.

Synthesis.

Verl. BA, bis CD in F getroffen wird. Traget auf D von F aus eine mittlere Proportionale FE oder

FE′ zwiſchen AF und FB und durch die P. A, E, B leget einen Kreis; er wird die gerade L. CD berühren.

Denn, weil AF : FE = FE : FB,

ſo folgt hieraus, daß

$$FE^2 = AF \cdot FB;$$

folgl. berührt CD den Kreis in E.

XXVII. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt.

Es werde verlangt, einen Kreis zu beſchreiben, der durch den Punkt E (Fig. 27) geht und die gerade Linie AB und CD berührt.

Erſter Fall. Angenommen, AB ſei parallel zu CD.

Analyſis.

Durch den P. O ziehet die Prll. FO und den Perpendikel KI zu den beiden gegebenen geraden L. Es iſt einleuchtend, daß der Halbm. OI gegeben iſt und folgl. iſt die Lage von OF auch gegeben; da aber der Halbm. OE oder OE′ gleich OI, ſo ſind der Halbmeſſer und der Mittelp. O gleichfalls beſtimmt.

Syn-

Synthesis.

Ziehet eine Prll. FO durch die Mitte der Entfer- ung zwischen den beiden gegebenen gr. L. und aus dem . E mit einem Halbm. gl. der Hälfte dieser Entfer- ung beschreibet einen Kreisbogen, welcher FO in O er O′ trift, so ist dieser P. der Mittelp. des gesuchten reises.

Denn OE = OI = OK und folglich muß der durch gehende Kreis die CD und AB in K und I berühren.

Zweiter Fall. Angenommen, CD sei schief AB (Fig. 27 bis).

Analysis.

Verl. die beiden gegeb. gr. L., bis sie in F zusam- enstoßen; ziehet OI, OK und OF und ziehet durch die L. EGH perpd. auf FO.

Die rechtw. Tr. OKF u. OIF sind congr., weil die . OF ihnen gemein u. die S. OI gl. OK ist; u. da der . F gegeb. ist, so folgt hieraus, daß die L. OF bestimmt ist.

Ueberdem aber ist der P. E gegeben, daher ist die- s auch der Fall mit dem Perpd. EG, und da GH gl. E, so ist klar, daß der P. H bestimmt ist. Jetzt, da ir zwei P. H und E haben, durch welche der Berüh- ungskr. zu AB und CD gehen muß, so könnte er nach m vorherg. Satze beschrieben werden.

Synthesis.

Verl. BA und CD bis zu ihrem Treffp. in F, zie-

het FO, welche den W. BFD halbirt, und von E fället auf dieſe gr. L. den Perpd. EG, den Ihr nach Obigem um eine Gröſ. gl. OF bis H verl.; nachgehends ſuchet eine mittlere Proport. LI oder LI′ zwiſchen HL und LE und durch die drei P. H, E, I oder H, E, I′ laſſet einen Kreis durchgehen; er wird den Bedingungen der Aufg. genügen.

In der That muß der Mittelp. des Kr., der durch E und H gehr, auf FO liegen, die perpd. auf der Mitte von EH iſt; es ſei O dieſer Mittelp., und ziehet die gr. L. OI und den Perpd. OK.

Weil $HL.LE = LI^2$, ſo berührt der Kreis die AB in I und der W. OIF iſt ein Rechter; folglich ſind die Tr. KOF und IOF congr., weil ſie erſtlich eine Seite OF gemein haben, und überdem die W. OKF und OFK reſpect. gleich OIF und OFI haben; alſo OI = OK.

Der aus dem P. O als Mittelp., mit OI als Halbmeſſer beſchr. Kr. gehet durch K und berührt CD in dieſem Punkt.

Zuſatz. Wenn der P. E ſich auf einer von den beiden gegebenen L. befände z. B. auf AB, ſo würde er mit dem Berührungspunkt von AB zuſammenfallen, und die Aufg. würde ſehr einfach; denn da der Mittelpunkt O immer auf FO iſt, ſo würde er durch den Durchſchn. dieſer L. mit dem Perpd. OI beſtimmt ſein.

XXVIII. Satz.

Aufgabe.

Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu gen, der einen gegebenen Kreis berührt.

Man soll einen Kreis beschreiben, der durch e Punkte A und B (Fig. 28) geht und welcher nen andern Kreis, dessen Mittelpunkt C ist, ərührt.

Analysis.

Durch den Berührungsp. D der beiden Kr. ziehet DE und BDF u. ziehet EF; durch F ziehet die Tang. G und ziehet den Durchm. BHCI.

Weil FG den gegebenen Kreis berührt, so ist der 3. BFG gl. FED und folgl. gleich BAD, weil FE und B offenbar prll. sind; aber die Tr. BGF und BDA aben außerdem einen gemeinsch. W. in B, sie sind also)nl. u. BF : BG = BA : BD, woraus

$$BA \cdot BG = BF \cdot BD = BI \cdot BH.$$

)a nun BI und BH gegeben sind, so ist also das Rect. A . BG bestimmt, und folgl. kann man die Lage des). G kennen.

Also sind die Tg. GF, die gr. L. BF u. dem zufolge :r Punkt D bestimmt; man kann also den gesuchten :reis beschreiben, von dem drei Punkte A, B, D :nnt.

L. EH, welche die Periph. EIF in I schneidet und die gr. L. FIK bis zum Durchschn. mit HK.

Die Triangel HEG und FEI sind augenscheinlich ähnlich, daher

$$HE : EG = EF : EI.$$
$$\text{und } HE \cdot EI = EG \cdot EF;$$
$$\text{aber } AE : EG = EF : EL,$$
$$\text{woraus } AE \cdot EL = EG \cdot EF;$$
$$\text{folglich } HE \cdot EI = AE \cdot EL;$$

welches zeigt, daß der Punkt I auf der Peripherie HIK liegt.

Woraus folgt, daß die beiden Kr. sich in dem P. I berühren; und in der That, sie haben in diesem P. einerlei Tang., weil, wenn man sich an jedem Kreise in diesem P. I eine Tang. denkt, so würden die W., welche diese zwei Tang. mit IF und IK bilde, respective gleich IFF und IHK und folgl. einander gleich sein, weil EF und HL prll. sind; die beiden Tang. fallen also in eine zusammen.

Zusatz. Die Aufg. würde beträchtlich einfacher, wenn der gegebene P. auf der gr. L. oder auf dem Kr. sich befände; er würde alsdann mit dem einen oder dem andern der Berührungsp. H und I zusammenfallen; in diesem Falle, nachdem EIH und FIK gezogen worden, würde der Perpendikel HK den Durchmesser des gesuchten Kreises bestimmen.

XXX. Satz.

Aufgabe.

Durch einen gegebenen Punkt einen Berührungskreis zu zwei gegebenen Kr. zu beschreiben.

Es werde verlangt, den Mittelpunkt O eines Kreises zu finden, welcher durch den Punkt C (Fig. 30) geht, und der zwei Kreise, deren Mittelpunkte A und B sind, berührt.

Analysis.

Ziehet die gr. L. AB, und verl. sie, bis sie die Verbindungslinie der beiden Berührungsp. E und F trift; ziehet OA und OB, AG und BH und CEI u. verl. IG und DC bis zu ihrem gegenseitigen Durchschn. in K.

Die gleichschenkligen Tr. EOF, EAG und FBH sind augenscheinlich ähnl.; also ist AG prll. zu BF und AE ist es zu BH. Es folgt hieraus, daß AE : BH = AD : BD; und da das Verh. von dieser Prop. bekannt ist, so ist der P. D bestimmt.

Ferner AG : BF = DG : DF

und DG : DF = DK : DC.

denn wegen der Berührung der Kr. O und A ist die L. IC prll. zu FC.

Da der P. D und CD bestimmt sind, so folgt aus den vorherg. Prop., daß DK und der P. K ebenfalls bekannt sind. Hieraus u. aus dem XVII. Satze des ersten

Buches S. 31 folgt, daß die gr. L. GE, die zwischen den gr. L. KI und CI liegt und verl. durch den gegeb. P. D geht, der Lage nach bestimmt ist; folgl. ist auch AEO der Lage nach bestimmt.

Wenn Ihr jetzt OC zieht, so ist es klar, daß der W. OCE bekannt ist, weil er gl. CEO ist; woraus folgt, daß die gr. L. CO und der Mittelp. O auch bekannt sind.

Synthesis.

Nehmet den P. D so, daß

AE : BH = AB : BD,

ziehet CD und traget auf CD von D in K eine vierte Proport. DK zu den L. BH, AE und DC; nachgehends durch die P. K u. C ziehet KI u. CI so, daß GE verl durch D geht, welches Ihr mittelst des XVII. Satzes im ersten Buches Seite 31 ausführen könnt. Ist dieses geschehen, so constr. über der Grundl. EC einen gleichschenkligen Tr., dessen eine Seite in der Verl. von AE sei. der Scheitel O dieses Tr. ist der Mittelp. des gesuchten Kr. Um es zu bew., ziehet AG, GF, OB u. BH.

Weil AE oder AG : BH oder BF = AD : BD und die Tr. ADG und BDF in D einen W. gemein haben, so sind sie ähnl. und

AD : BD = DG : DF = DK : DC,

welches beweist, daß IG prll. zu FC ist und daß folgl. die Kr. O und A sich in E berühren. Aber der Tr. BFH ist gleichsch., denn seine Seiten BF und BH sind respect. prll. zu den Seiten AG und AE des gleichsch. Tr. GAE; mithin begegnen sich die Kreise O und B im

F, und da BH prll. zu EO ist, so ist dieser P. ein erührungsp. Ferner, da der W. ECO gleich CEO, ist die Seite OE = OC; der aus dem Mittelp. O schr. und durch E und F gehende Kr. gehet folgl. auch rch C.

Andere Auflösung.

Analysis.

Verbindet die Mittelp. A, B, O (Fig. 30), verl. B, bis sie die Verbindungsl. der zwei Berührungsp. E, in D trift; ziehet BH und CD und verl. diese letztere s sie den Kr. in L schneidet.

Weil die Tr. EOF und FBH gleichsch. sind, so sind e W. OFE und BFH respect. gleich den W. OEF u. HF, welche folgl. unter sich gleich sind; woraus folgt, aß EO prll. zu BH ist und daß AE:BH = DA:DB; elches beweist, daß der P. D bestimmt ist.

Ferner

DA : DB = DE : DH oder = DE . DF : DH . DF; er das Rect. DH . DF ist bekannt, weil es gl. dem ect. aus den auf BD durch den Kr. B gebildeten Abschnitten ist, mithin sind die Rect. DE . DF u. DC . DL estimmt; da DC gegeb. ist, so sieht man, daß DL u. er P. L auch gegeb. sind. Die Aufg. ist alsdann zurückgeführt auf den XXVIII. Satz in diesem Buche Seite 115.

Synthesis.

Nehmet den P. D so, daß AE : BH = AD : BD,

ziehet DC und verl. sie um CL, so daß das Rectangel DC . DL in dem Verh. von AE zu BH mit dem Rect. sei, welches aus den beiden Theilen einer durch D zum Kr. B geführten Secante gebildet ist; beschr. nachgehends einen Kr., der durch die P. C und L geht und den Kr. A berührt; er wird auch den Kr. B berühren.

In der That, ziehet OA, OB, EH und ziehet BH prll. zu AO.

Weil AE : BH = AD zu BD,

so ist einleuchtend, daß EH verl. die AD in D treffen wird; also

AE : BH = DE : DH oder = DE . DF : DH . DF;

aber durch Constr. AE : BH = DC . DL : DH . DF,

folglich DC . DL = DE . DF;

woraus hervorgeht, daß der P. F in der Peripherie O liegt. Demnach ist der Tr. EOF gleichschenklig, und eben so muß es mit HBF sein, der ihm ähnl. ist; also gehört F auch dem Kr. B an und er ist der Berührungsp. der Kr. B und O.

Wenn der P. L mit den P. C zusammenfällt, so würde die Constr. sich durch den Zusatz des vorhergeh. Satzes ausführen.

XXXI. Satz.

Aufgabe.

Einen Berührungskreis zu zwei gegebenen geraden Linien und zu einem gegebenen Kreise zu beschreiben.

Es sei aufgegeben, einen Kreis zu beschreiben, welcher die Linien AB und CD (Fig. 31) und einen andern Kreis, dessen Mittelpunkt E ist, berühre.

Analysis.

Ziehet FE, ziehet nach dem Berührungsp. die gerade FH, FI; nachgehends aus dem P. F als Mittelp. beschreibet mit dem Halbm. FE einen Kreis, welcher in K und in L die verl. FI und FH schneidet, und durch diese P. ziehet die Tang. MN, OP.

Weil FE = FK = LF und FG = FH = FI, so folgt hieraus, daß GE = HK = IL. Aber da die Tg. CD und OP auf einerlei gr. L. FK perpd., so sind sie prll.; und aus eben dem Grunde ist AB prll. zu MN, folglich sind OP und MN der Lage nach bestimmt, und mittelst des XXVII. Satzes, Seite 112 ist der Kr. EKL bekannt; es ist dieses eben der Fall mit dem concentrischen Kr. GHI.

Synthesis.

In einer Entfernung gleich dem Halbm. des gegebenen Kr. ziehet MN und OP prll. zu AB und CD; nachgehends mittelst des XXVII. Satzes dieses Buchs suchet den Mittelp. F eines Kr., der durch den P. E geht und MN und OP berührt; so ist F auch der Mittelp. des gesuchten Kr.

In der That, ziehet FE, FK und FL. Weil GE = HK = IL, so ist einleuchtend, daß FG = FH = FI.

Also ist der Kr. in H und I berührend, denn CD und AB sind respect. perpd. auf FK und FL.

Anmerk. Die sechs vorherg. Aufg. sind alle in dieser allgem. Aufg. enthalten:

„Wenn drei Dinge gegeben sind, es seien drei P. oder gerade L. oder Kr., einen durch diese Data bestimmten Kr. zu beschr.“

Dieser Vortrag stellt zehn von einander verschiedene Fälle dar. Zwei dieser Fälle sind in den Elementen abgehandelt, nämlich der, wo man einen Kreis durch drei P. legt, und der, wo verlangt wird, einen Berührungskreis zu drei gr. L. zu beschreiben.

Ein gemeinsch. Princip, welches sich in allen bekannten Aufl. findet, vereinfacht die Bedingungen der Aufg., indem man die L. oder die gegeb. Kr. durch P. ersetzt. Es bleiben noch zwei Fälle abzuhandeln. Diese sind 1) der, wo man drei Kreise giebt; 2) der, wo man zwei Kreise und eine gerade L. giebt. Diese zwei Aufg. werden leicht auf den aufgelösten Fällen zurückgeführt, wenn man Gebrauch von analogen Mitteln macht, als denen, welche man in dem letzten Satze angewandt hat, d. h., indem man eine Prlle. zieht, oder indem man einen concentr. Kr. beschreibt, in Entfernungen, die nach der relativen Lage der Data gleich entweder der Summe oder der Differ. der gegebenen Halbm. sein müssen *).

*) Ist vom ersten Falle die Rede, d. h., wenn man einen Kr. beschr soll, der drei gegebene Kreise berührt, so wird man sich dabei so benehmen. Nennen wir A, B, C die Mittelp. der gegebenen Kr.; a, b, c ihre Halbm., X den Mittelp. des gesuchten Kr. und x seinen Halbm.

Man nehme an, die Aufg. sei aufgelöst, und beschreibe

aus X als Mittelp. einen Kr., der durch einen der drei gegeb. Mittelp. z. B. durch A geht; der Halbm. dieses Kr. wird ein: $x \pm a$ u. seine Periph. wird sich von den Mittelp. der andern Kr. um bekannte Grß. gl. $b \pm a$ für den einen u. um $\pm a$ für den andern entfernen. Es folgt hieraus, daß wenn man aus B und C als Mittelp. Kr. beschr., die resp. diese Halbm. haben, so werden sie den von uns gezogenen Hülfskreis berühren. Allein es ist einleuchtend, daß die zwei Berührungskr. nach dem Vortrage der Aufg. gegeb. sind; der Hülfskr. wird also bestimmt sein, weil er durch einen gegeb. A gehen und zwei gegeb. Kr. berühren sollte; seine Bestimmung geschiehet mittelst des XXX. Satzes S. 119. Es ist nun klar, daß man aus diesem Kr. den gesuchten leicht ableiten wird.

Den zweiten Fall aufzulösen, verfährt man auf ähnl. Art.

benen geraden Linie BD gezogen ist in C in nem gegebenen Verhältniß getheilt; welches auch nmer die Neigung von AB sein mag, so wird r Punkt C sich doch immer auf einer der Lage ach bestimmten, geraden Linie befinden.

Analysis

Aus A fälle auf BD den Perpd. AD und ziehe rch C die CE prll. zu BD. Es ist einleuchtend, daß C : AB = AE : AD und folglich ist das Verh. von E zu AD bekannt; aber AD ist sowohl der Lage als er Grß nach gegeben, also sind AE und der P. E, egeb. und folgl. ist CE, die perpd. auf AD ist, der Lage ach bestimmt.

Synthesis.

Fället den Perpd. AD, welcher in E in einem gegebenen Verhältniß getheilt ist, und errichtet den Prpd. CE, so wird diese gr. L. der verlangte Ort sein; denn da CE pll. zu BD, so ist

AC : AB = AE : AD.

II. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man aus einem gegebenen Punkt nach er Peripherie eines ebenfalls gegebenen Kreises

gerade Linien ziehet und sie in einem bekannten Verhältniß schneidet, so ist der Ort der Theilungspunkte eine Peripherie von einem bestimmten Kreise.

Gesetzt, daß AB (Fig. 2), welche zwischen dem Punkt A und zwischen einer gegebenen Peripherie enthalten ist, im Punkt C in einem gegebenen Verhältnisse getheilt sei, so wird dieser Punkt C sich immer in einer Peripherie von einem bestimmten Kreise befinden.

Analysis.

Verbindet den P. A mit dem Mittelp. D des gegebenen Kreises und ziehet CE prll. zu BD.

Es ist einleuchtend, daß

$$AC : AB = AE : AD;$$

also ist das Verh. von AE zu AD gegeben und folglich sind AE und der P. E bestimmt.

Ferner, weil

$$AC : AB = CE : BD,$$

so ist das Verh. von CE zu BD bekannt und für jede Lage von AB, ist CE der Größe nach bestimmt; und da BD eine beständige Grß. ist, so sieht man, daß CE ebenfalls eine ist und folgl. ist der P. C immer auf der Peripherie eines aus E als Mittelpunkt mit dem bekannten Halbm. CE beschriebenen Kreises.

Syn-

Synthesis.

Ziehet AD und, nachdem diese gr. L. in E in dem gegebenen Verh. getheilt ist, so suchet eine L. EC, die mit BD in den nämlichen Verh. sei; nachgehends beschr. aus E als Mittelp. und mit CE als Halbm. einen Kr., welcher der verlangte Ort sein wird.

In der That, ziehet AB, welche die eine und die andere Periph. schneidet, und ziehet CE, BD.

Weil CE : BD = AE : AD, so folgt hieraus, daß CE : AE = BD : AD; folgl. sind die Tr. CAE u. BAD, die überdem einen Winkel gemein haben, ähnlich und

AC : AB = AE : AD,

d. h. in dem gegebenen Verhältniß.

III. Satz.

Lehrsatz.

Auf jedem von den Schenkeln eines gegebenen Winkels nimmt man einen Punkt an und, ohne das Verhältniß der Entfernungen der beiden so bestimmten Punkte vom Scheitel des Winkels, noch die Lage dieses Scheitels, noch die Größe des Winkels zu ändern, nimmt man an, daß einer der Punkte eine gegebene gerade Linie durchlaufe; man verlangt, zu beweisen, daß der

Synthesis.

Nachdem der Perpd. AD gefällt und der Winkel DAE gleich BAC gemacht worden, so traget, wie oben, von A nach E eine vierte Prop. zu den L. AB, AC, AD und durch den so gestellten P E ziehet den Prpd. CE auf AE; dieses wird der gesuchte Ort sein. Denn da die rechtwinkl. Tr. BAD und CAE überdem einen gleichen spitzen W. haben, so sind sie ähnlich, und folgl.

$$AB : AC = AD : AE \text{ oder } = M : N,$$

wenn $\frac{M}{N}$ das beständige Verh. von AB zu AC ist.

IV. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen fixen Punkt zwei gerade Linien zieht, deren Längen in einem beständigen Verhältniß sind und deren Neigung unveränderlich ist, wenn der Endpunkt der einen eine Peripherie von einem bestimmten Kreise durchläuft, so wird der Endpunkt der andern ebenfalls zum Orte eine bestimmte Kreisperipherie haben.

Angenommen, der Scheitel A des Winkels BAC (Fig. 4) und das Verhältniß seiner Seiten seien beständig; wenn B einen gegebenen Kreis durchläuft, so wird auch der Ort von C ein bestimmter Kreis sein.

Verb. den P. A mit dem Mittelp. D des gegebenen Kr.; ziehet eine gr. L. AE, die gegen AD um den gegeb. W. geneigt sei und deren Länge mit AD ein Verh. gl. dem gegeb. Verh. habe; endlich ziehet DB und EC.

Da der P. A und der Mittelp. D gegeb. und fixirt sind, so ist die gr. L. AD bestimmt; eben so ist es AE, die auch beständig und von bekannter Grß. ist; also ist der P. E bestimmt und unveränderlich.

Ferner, da der ganze W. BAC gl. DAE, so ist der Theil BAD gl. CAE, und weil überdem AB : AD = AB : AE, so folgt hieraus, daß die Tr. ADB und AEC ähnlich sind, und daß

$$AB : BD = AC : CE$$

$$\text{oder auch } CE = \frac{AC}{AB} \cdot BD;$$

es ist aber auch das Verh. $\frac{CA}{AB}$ beständig und bekannt, BD ist es nach der Hypothese auch. Daher ist die Entfernung CE beständig und bestimmt.

Folglich durchläuft der P. C eine Kreisperipherie, deren Mittelp. E und Halbm. CE bekannt sind.

Synthesis.

Nachdem AE gegen AD unter dem gegeb. W. gezogen, und sie von einer solchen Länge genommen worden, daß $\frac{AD}{AE}$ gleich dem gegebenen Verh. sei, so beschr. aus E als Mittelp. mit dem Halbm. CE einen Kr. Dieser wird der gesuchte Ort sein.

Denn AD : BD = AE : EC;
aber der W. BAD ist gleich CAE, weil BAC = DAE,
also sind die Tr. ABD nnd CAE ähnl. und

AB : AC = AD : AE

d. h. in dem gegebenen Verhältniß.

Anmerk. Ein Kreisbogen hat seine Tang. zur Grenze, und er nähert sich ihr immerwährend nach Maaßgabe der Entfernung des Mittelp. und der Vergrößer. der Peripherie; der geradlinige Ort kann also aus dem Kreisort abgeleitet werden, und was wir von diesem gesagt haben, werden wir auch auf den ersten übertragen, wenn wir annehmen, der Mittelp. liege in einer unendlichen Entfern. Wenn man also in dem II. Satze dieses Buchs Seite 61 sich vorstellt, daß die Mittelp. E und D (Fig. 2), ohne die gr. L. AD zu verlassen, sich immer mehr von dem P. A entf. und sich davon um eine unendliche Weite entfernen, alsdann werden die durch C und B gehenden Kreisen zwei gr. Perpd. zu AD, welches der Fall des I. Satzes S. 59 ist.

Eben so, wenn wir in dem IV. Satze die Mittelp. D und E unendl. entfernen, ohne daß einer von ihnen die gr. L. AD und der andere die gr. L. AE verläßt, alsdann fallen die durch B und C gehenden Kreise mit ihrer Tang. zusammen und werden folglich respective zu AD und AE gr. Perpend. wie in dem III. Satze Seite 62.

V. Satz.

Lehrsatz.

Eine durch einen fixen Punkt gezogene gerade Linie ist in einem Punkte ihre Länge in

Also ist der Kr. in H und I berührend, denn CD und AB sind respect. perpd. auf FK und FL.

Anmerk. Die sechs vorherg. Aufg. sind alle in dieser allgem. Aufg. enthalten:

„Wenn drei Dinge gegeben sind, es seien drei P. oder gerade L. oder Kr., einen durch diese Data bestimmten Kr. zu beschr.“

Dieser Vortrag stellt zehn von einander verschiedene Fälle dar. Zwei dieser Fälle sind in den Elementen abgehandelt, nämlich der, wo man einen Kreis durch drei P. legt, und der, wo verlangt wird, einen Berührungskreis zu drei gr. L. zu beschreiben.

Ein gemeinsch. Princip, welches sich in allen bekannten Aufl. findet, vereinfacht die Bedingungen der Aufg., indem man die L. oder die gegeb. Kr. durch P. ersetzt. Es bleiben noch zwei Fälle abzuhandeln. Diese sind 1) der, wo man drei Kreise giebt; 2) der, wo man zwei Kreise und eine gerade L. giebt. Diese zwei Aufg. werden leicht auf den aufgelösten Fällen zurückgeführt, wenn man Gebrauch von analogen Mitteln macht, als denen, welche man in dem letzten Satze angewandt hat, d. h., indem man eine Prlle. zieht, oder indem man einen concentr. Kr. beschreibt, in Entfernungen, die nach der relativen Lage der Data gleich entweder der Summe oder der Differ. der gegebenen Halbm. sein müssen *).

*) Ist vom ersten Falle die Rede, d. h., wenn man einen Kr. beschr soll, der drei gegebene Kreise berührt, so wird man sich dabei so benehmen. Nennen wir A, B, C die Mittelp. der gegebenen Kr.; a, b, c ihre Halbm., X den Mittelp. des gesuchten Kr. und x seinen Halbm.

Man nehme an, die Aufg. sei aufgelöst, und beschreibe

aus X als Mittelp. einen Kr., der durch einen der drei gegeb. Mittelp. z. B. durch A geht; der Halbm. dieſes Kr. wird ſein: $x \pm a$ u. ſeine Periph. wird ſich von den Mittelp. der andern Kr. um bekannte Grß. gl. $b \pm a$ für den einen u. um $c \pm a$ für den andern entfernen. Es folgt hieraus, daß wenn man aus B und C als Mittelp. Kr. beſchr., die reſp. dieſe Halbm. haben, ſo werden ſie den von uns gezogenen Hülfskreis berühren. Allein es iſt einleuchtend, daß die zwei Berührungskr. nach dem Vortrage der Aufg. gegeb. ſind; der Hülfskr. wird alſo beſtimmt ſein, weil er durch einen gegeb. A gehen und zwei gegeb. Kr. berühren ſollte; ſeine Beſtimmung geſchiehet mittelſt des XXX. Satzes S. 119. Es iſt nun klar, daß man aus dieſem Kr. den geſuchten leicht ableiten wird.

Den zweiten Fall aufzulöſen, verfährt man auf ähnl. Art.

Drittes Buch.

Erklärungen.

Wenn ein Punkt nach einem bestimmten Gesetze seine Lage verändert, so heißt die Linie, welche er beschreibt, der Ort dieses Punkts.

I. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen geraden Linie Linien zieht, welche in einem bekannten Verhältniß geschnitten seien, so ist der Ort der Theilungspunkte eine andere der Lage nach bestimmte gerade Linie. (Fig. 1, Tafel 3).

Eine gerade Linie AB aus einem fixen Punkt A nach einem veränderlichen Punkt B einer ge-

gebenen geraden Linie BD gezogen ist in C in einem gegebenen Verhältniß getheilt; welches auch immer die Neigung von AB sein mag, so wird der Punkt C sich doch immer auf einer der Lage nach bestimmten, geraden Linie befinden.

Analysis

Aus A fälle auf BD den Perpd. AD und ziehe durch C die CE prll. zu BD. Es ist einleuchtend, daß AC : AB = AE : AD und folglich ist das Verh. von AE zu AD bekannt; aber AD ist sowohl der Lage als der Grß nach gegeben, also sind AE und der P. E, gegeb. und folgl. ist CE, die perpd. auf AD ist, der Lage nach bestimmt.

Synthesis.

Fället den Perpd. AD, welcher in E in einem gegebenen Verhältniß getheilt ist, und errichtet den Prpd. CE, so wird diese gr. L. der verlangte Ort sein; denn da CE pll. zu BD, so ist

AC : AB = AE : AD.

II. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man aus einem gegebenen Punkt nach der Peripherie eines ebenfalls gegebenen Kreises

gerade Linien ziehet und sie in einem bekannten Verhältniß schneidet, so ist der Ort der Theilungspunkte eine Peripherie von einem bestimmten Kreise.

Gesetzt, daß AB (Fig. 2), welche zwischen dem Punkt A und zwischen einer gegebenen Peripherie enthalten ist, im Punkt C in einem gegebenen Verhältnisse getheilt sei, so wird dieser Punkt C sich immer in einer Peripherie von einem bestimmten Kreise befinden.

Analysis.

Verbindet den P. A mit dem Mittelp. D des gegebenen Kreises und ziehet CE prll. zu BD.

Es ist einleuchtend, daß

$$AC : AB = AE : AD;$$

also ist das Verh. von AE zu AD gegeben und folglich sind AE und der P. E bestimmt.

Ferner, weil

$$AC : AB = CE : BD,$$

so ist das Verh. von CE zu BD bekannt und für jede Lage von AB, ist CE der Größe nach bestimmt; und da BD eine beständige Grß. ist, so sieht man, daß CE ebenfalls eine ist und folgl. ist der P. C immer auf der Peripherie eines aus E als Mittelpunkt mit dem bekannten Halbm. CE beschriebenen Kreises.

Syn-

Synthesis.

Ziehet AD und, nachdem diese gr. L. in E in dem gegebenen Verh. getheilt ist, so suchet eine L. EC, die mit BD in den nämlichen Verh. sei; nachgehends beschr. aus E als Mittelp. und mit CE als Halbm. einen Kr., welcher der verlangte Ort sein wird.

In der That, ziehet AB, welche die eine und die andere Periph. schneidet, und ziehet CE, BD.

Weil CE : BD = AE : AD, so folgt hieraus, daß CE : AE = BD : AD; folgl. sind die Tr. CAE u. BAD, die überdem einen Winkel gemein haben, ähnlich und

AC : AB = AE : AD,

d. h. in dem gegebenen Verhältniß.

III. Satz.

Lehrsatz.

Auf jedem von den Schenkeln eines gegebenen Winkels nimmt man einen Punkt an und, ohne das Verhältniß der Entfernungen der beiden so bestimmten Punkte vom Scheitel des Winkels, noch die Lage dieses Scheitels, noch die Größe des Winkels zu ändern, nimmt man an, daß einer der Punkte eine gegebene gerade Linie durchlaufe; man verlangt, zu beweisen, daß der

andere Punkt ebenfalls eine bestimmte gerade Linie als Ort hat.

Das Verhältniß von AB zu AC (Fig. 3), der Winkel BAC und sein Scheitel A sind gegeben; wenn der Endpunkt B die gerade Linie BD beschreibt, so wird der Endpunkt C auch eine der Lage nach bestimmte gerade Linie CE beschreiben.

Analysis.

Fället auf BD einen Perpd. AD, ziehet AE so, daß sie mit AD einen W. DAE gleich BAC bildet, und traget auf die so gestellten L. eine Entf. AE, welche die vierte Prop. zu AB, AC und AD ist; die gerade L. CE ist der nach der Hypothese verlangte Ort.

Weil der W. DAE durch Constr. gleich BAC ist, so ist er bekannt; und da der Perpd. AD gegeben ist, so ist folgl. AE der Lage nach bekannt; sie ist es auch der Grß. nach, denn AB, AC, AD sind gegeben. Ueberdem, da der W. BAC gleich DAE, so folgt hieraus, daß der W. BAD gleich ist CAE; und wenn man überdem bedenkt, daß

$$AB : AD = AC : AE,$$

so wird man hieraus schließen, daß die Tr. ABD und ACE ähnlich sind, da sie einen gleichen W. zwischen proportionalen Seiten haben. Folglich ist der W. CEA gleich BDA d. h. gleich einem Rechten; folglich ist die gerade Linie CE der Lage nach bestimmt.

Synthesis.

Nachdem der Perpd. AD gefällt und der Winkel DAE gleich BAC gemacht worden, so traget, wie oben, von A nach E eine vierte Prop. zu den L. AB, AC, AD und durch den so gestellten P E ziehet den Prpd. CE auf AE; dieses wird der gesuchte Ort sein. Denn da die rechtwinkl. Tr. BAD und CAE überdem einen gleichen spitzen W. haben, so sind sie ähnlich, und folgl.

$$AB : AC = AD : AE \text{ oder } = M : N,$$

wenn $\frac{M}{N}$ das beständige Verh. von AB zu AC ist.

IV. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen fixen Punkt zwei gerade Linien zieht, deren Längen in einem beständigen Verhältniß sind und deren Neigung unveränderlich ist, wenn der Endpunkt der einen eine Peripherie von einem bestimmten Kreise durchläuft, so wird der Endpunkt der andern ebenfalls zum Orte eine bestimmte Kreisperipherie haben.

Angenommen, der Scheitel A des Winkels BAC (Fig. 4) und das Verhältniß seiner Seiten seien beständig; wenn B einen gegebenen Kreis durchläuft, so wird auch der Ort von C ein bestimmter Kreis sein.

Verb. den P. A mit dem Mittelp. D des gegebenen Kr.; ziehet eine gr. L. AE, die gegen AD um den gegeb. W. geneigt sei und deren Länge mit AD ein Verh. gl. dem gegeb. Verh. habe; endlich ziehet DB und EC.

Da der P. A und der Mittelp. D gegeb. und fixirt sind, so ist die gr. L. AD bestimmt; eben so ist es AE, die auch beständig und von bekannter Grß. ist; also ist der P. E bestimmt und unveränderlich.

Ferner, da der ganze W. BAC gl. DAE, so ist der Theil BAD gl. CAE, und weil überdem AB : AD = AB : AE, so folgt hieraus, daß die Tr. ADB und AEC ähnlich sind, und daß

$$AB : BD = AC : CE$$

$$\text{oder auch } CE = \frac{AC}{AB} \cdot BD;$$

es ist aber auch das Verh. $\frac{CA}{AB}$ beständig und bekannt, BD ist es nach der Hypothese auch. Daher ist die Entfernung CE beständig und bestimmt.

Folglich durchläuft der P. C eine Kreisperipherie, deren Mittelp. E und Halbm. CE bekannt sind.

Synthesis.

Nachdem AE gegen AD unter dem gegeb. W. gezogen, und sie von einer solchen Länge genommen worden, daß $\frac{AD}{AE}$ gleich dem gegebenen Verh. sei, so beschr. aus E als Mittelp. mit dem Halbm. CE einen Kr. Dieser wird der gesuchte Ort sein.

Denn AD : BD = AE : EC;
iber der W. BAD iſt gleich CAE, weil BAC = DAE,
alſo ſind die Tr. ABD nnd CAE ähnl. und

AB : AC = AD : AE

. h. in dem gegebenen Verhältniß.

Anmerk. Ein Kreisbogen hat ſeine Tang. zur Grenze, und er nähert ſich ihr immerwährend nach Maaßgabe der Entfernung des Mittelp. und der Vergrößer. der Peripherie; der geradlinige Ort kann alſo aus dem Kreisort abgeleitet werden, und was wir von dieſem geſagt haben, werden wir auch auf den erſten übertragen, wenn wir annehmen, der Mittelp. liege in einer unendlichen Entfern. Wenn man alſo in dem II. Satze dieſes Buchs Seite 61 ſich vorſtellt, daß die Mittelp. E und D (Fig. 2), ohne die gr. L. AD zu verlaſſen, ſich immer mehr von dem P. A entf. und ſich davon um eine unendliche Weite entfernen, alsdann werden die durch C und B gehenden Kreiſen zwei gr. Perpd. zu AD, welches der Fall des I. Satzes S. 59 iſt.

Eben ſo, wenn wir in dem IV. Satze die Mittelp. D und E unendl. entfernen, ohne daß einer von ihnen die gr. L. AD und der andere die gr. L. AE verläßt, alsdann fallen die durch B und C gehenden Kreiſe mit ihrer Tang. zuſammen und werden folglich reſpective zu AD und AE gr. Perpend. wie in dem III. Satze Seite 62.

V. Satz.

Lehrſatz.

Eine durch einen fixen Punkt gezogene ge-
ade Linie iſt in einem Punkte ihre Länge in

zwei Theile so getheilt, daß das Rectangel aus dem einen und der ganzen Linie gleich einem beständigen und gegebenen Rectangel sei; wenn der Durchschnittspunkt eine gegebene gerade Linie durchläuft, so wird der Endpunkt der beweglichen Linie zum Ort eine bestimmte Kreisperipherie haben.

Das Rectangel AB . AC (Fig. 5) und der Punkt A sind beständig und gegeben; die gerade Linie BD ist der Lage nach gegeben; der Punkt C wird eine bekannte Kreisperipherie durchlaufen.

Analysis.

Ziehet AD perpend. auf BD und nehmet das Rect. AD . AE = AB . AC. Es folgt hieraus, daß AE u. der P. E gänzlich bestimmt sind. Ziehet CE. Weil

AD . AE = AB . AC,

so ist AD : AB = AC : AE.

Diese Prop. beweist die Aehnl. der zwei Tr. ABD und ACE, welchen der W. A gemein ist. Es folgt hieraus, daß ACE = ADB und folgl., daß W. ACE immer ein Rechter ist, welche Lage die bewegliche gerade L. auch annimmt, welches sagt, daß der P. C eine Kreisperiph. durchläuft, davon AE der Durchm. ist.

Synthesis.

Nachdem der Perpendikel AD gezogen, machet das

Rect. AD . AE gleich dem gegebenen Raum u. beschr. über dem Durchmesser AE einen Kreis. Dieser ist der gesuchte Ort.

Denn, wenn Ihr AC und CE zieht, so werdet Ihr zwei ähnl. Dr. ABD und AEC bilden, weil sie zwei W. haben werden, die einzeln einander gl. sind; folgl. AB : AD = AE : AC und AB . AC = AD . AE = dem gegebenen Raum.

VI. Satz.

Lehrsatz.

Eine gerade Linie, die beständig durch einen fixen Punkt gehet, ist in zwei Theile getheilt, so daß das Rectangel aus dem einem vom fixen Punkt an und aus der ganzen Linie beständig gleich sei einem gegebenen Rectangel; wenn der Theilungspunkt einen gegebenen Kreis durchläuft, so wird der Endpunkt der geraden Linie zum Ort eine der Lage nach beständige gerade Linie oder eine Peripherie eines bestimmten Kreises haben, je nachdem der fixe Punkt in, oder nicht in der gegebenen Kreisperipherie liegen wird.

Nehmet, an das Rectangel AC . AB sei gleich einem gegebenen Raum und der Abschnitt AC sei auf einer gegebenen Kreisperipherie bestimmt;

der fixe Punkt A kann nun in oder nicht in dieser Peripherie liegen. (Fig. 6 u. 6 bis).

Erster Fall. Wenn der Punkt A in der gegebenen Peripherie liegt (Fig. 6), so ist der Ort B eine der Lage nach bestimmte gerade Linie.

Analysis.

Ziehet den Durchm. AE und machet AE . AD = AC . AC, so wird der P. D bestimmt sein, und es ist klar, daß er ein P. des gesuchten Orts sei.

Jetzt ziehet CE und BD; weil

AE . AD = AB . AC,

so ist AC : AE = AD : AB;

mithin sind die Tr. CAE und BAD ähnl.

Also ist der W. ADB gl. ACE d. h. gleich einem Rechten; folgl. ist die gr. L. DB der Lage nach bestimmt.

Synthesis.

Nachdem der Durchmesser AE gezogen, machet das Rect. AE . AD gleich dem gegebenen Raum; der Perpd. BD ist der gesuchte Ort.

Denn, wenn Ihr ACB und CE zieht, so werdet Ihr zwei Tr. ACE und ADB bilden, die augenscheinlich ähnlich sind, welches zeigt, daß

AC : AE = AD : AB, woraus

AC . AB = AB . AD = dem gegebenen Raum.

Zweiter Fall. Wenn der Punkt A nicht

in der gegebenen Peripherie ECC'D liegt, so ist der Ort B eine bestimmte Kreisp. (Fig. 6 bis).

Analysis.

Ziehet den Durchm. EAD und die Sehne CABC' des gegeb. Kreises, welche den verlangten Ort in B und F schneidet. Es sei M das gegebene Rect. und N das bekannte Rect. EA. AD. Man hat nach der Hypothese $AB \cdot AC = AF \cdot AC' = M$ und $AC \cdot AC' = N$; woraus folgt, daß das Verh. $\frac{AC}{AF} = \frac{AC'}{AB} = \frac{N}{M}$. Folglich ist das Verh. $\frac{AC'}{AB}$ bestimmt, und nach dem II. Satze dieses Buchs, Seite 61, befindet sich der Endp. B der gr. L. AB auf dem Umfang eines gegebenen Kreises.

Synthesis.

Nachdem der Durchm. DAE gezogen, machet das Rect. AD. AH gleich dem gegeb. Raum u. (3. Buch, II. Satz, Seite 127) beschr. einen Kreis BGFH, so daß eine durch A gezogene Sehne dieses Kr. in diesem Punkt in dem Verh. von AE zu AH getheilt sei; dieser Kr. ist der gesuchte Ort.

Denn $AE : AH = AC : AB = AC \cdot AC' : AB \cdot AC'$;
mithin $AC \cdot AC' : AB : AC' = AE \cdot AD : AH \cdot AD$;
aber $AC \cdot AC' = AE \cdot AD$;
folglich $AB \cdot AC' = AH \cdot AD = M$.

VII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn die Größe eines Winkels, sein Scheitel und das Rectangel aus seinen Seiten fixirt und gegeben sind und wenn der Endp. von einer der Seiten eine gegebene gerade Linie durchläuft, so wird der Endpunkt der andern eine bestimmte Kreisperipherie zum Orte haben.

Der Punkt A (Fig. 7), der Winkel BAC und das Rectangel AB.AC sind beständig; wenn B die gegebene gerade Linie BD durchläuft, so ist der Ort von C ein bekannter Kreis.

Analysis.

Aus A fället auf BD den Perpend. AD. Ziehet AE, die mit AD einen Winkel gleich dem gegeb. macht, und ein Rect. AD.AE gleich einem gegebenen Rect.; ziehet CE.

Weil AD augenscheinlich der Lage und Größe nach gegeben ist, so ist es eben so mit AE; und da das Rect. AD.AE gleich AB.AC ist, so folgt hieraus, daß

$$AD : AB = AC : AE.$$

Weil ferner der W. DAB gleich ist EAC, so sind die Tr. DAB und EAC ähnl., woraus folgt, daß der W. ACE gleich ADB ist d. h. gleich einem Rechten; mit

hin durchläuft der P. C einen Kr., dessen Durchmesser AE ist.

Synthesis.

Nachdem der Perpend. AD gefällt, ziehet AE so, daß der W. DAE gleich dem gegebenen W. und das Rect. AD . AE gleich dem gegebenen Rect. sei; der über AE als Durchm. beschr. Kr. ist der gesuchte Ort.

In der That, ziehet CE; die Tr. DAB und EAC sind ähnl, weil beide rechtw. sind, der eine in D, der andere in C, u. ferner der W. EAC gl. BAD ist; mithin

$$AD : AB = AC : AE$$

und folgl. ist das Rect. AB . AC gleich AD . AE d. h. gleich dem gegeb. Rectangel.

VIII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn zwei gerade Linien, deren Längen in einem beständigen Verhältniß sind, sich bewegen, indem sie sich mit Beibehaltung ihrer Richtung immer auf zwei fixe gegebene gerade Linien stützen, so wird ihr Durchschnittspunkt eine bestimmte gerade Linie beschreiben.

Das Verhältniß von AB zu AC (Fig. 8, Tafel 3) ist beständig, eben so wie die Winkel ABD und ACD, welche durch die geraden Linien

mit den fixen Linien DE, DF gebildet sind; der Ort des P. A ist eine bestimmte gerade Linie.

Analysis.

Ziehet DA und verl. BA, bis sie DF in G trift. Der Tr. DBG ist der Gattung nach bestimmt, weil die W. B und D gegeben sind. Eben so ist es mit dem Tr. AGC und folgl. ist das Verh. von AC zu AG bestimmt; da das Verh. von AB zu AC beständig ist, so folgt hieraus, daß das von AB zu AG und das von BG zu AG ebenfalls beständig sind; eben so ist es mit dem Verh. von BG zu DG und folgl. auch mit dem Verh. von AG zu DG. Da ferner der W. G bestimmt ist, so sieht man, daß der Tr. ADG der Gatt. nach bestimmt ist, woraus folgt, daß die gr. L. AD der Lage nach fixirt ist.

Synthesis.

Auf DE nehmet einen bel. P. H, und ziehet durch diesen P. gerade L. HI und HL, die mit DF und DE W. machen, die respect. gleich den gegebenen W. sind; verl. nachgehends IH bis in M um eine Grß. MH, so daß $\frac{MH}{HL}$ gleich dem gegebenen Verh. sein; suchet eine dritte Prop. IN zu IM und IH und ziehet DNA; diese gr. L. ist der gesuchte Ort.

Denn IM : IH = IH : IN,
also MH : IH = NH : IN;
aber AB : AG = NH : IN,

und wegen der Aehnl. der Tr. ACG und HLI

AG : AC = IH : HL,
also endlich AB : AC = NH . IH : IN . HL =
MH . IN : IN . HL = MH : HL
d. h. in dem gegeb. Verhältniß.

IX. Satz.

Lehrsatz.

Wenn drei gerade Linien, die in einem Punkte zusammenlaufen, der Lage nach gegeben sind, und durch eine vierte unter einem bestimmten W. geschnitten werden so, daß das Rectangel aus ihrem ersten Abschnitt und einer gegebenen geraden Linie gleich der Summe der Rectangel aus ihrem ersten und ihrem zweiten Abschnitt mit gegebenen Linien seien; der Ort der Punkte, von wo an die Abschnitte gerechnet werden, ist eine gerade Linie.

Nehmet an, daß ABCD (Fig. 9) die gerade Linien EF, EG und EH unter gegebenen Winkeln schneidet, so daß

AB . KL = AC . ML + AD . NM.

Wenn nun die geraden Linien KL, LM, NM gegeben sind, so wird der Ort des Punktes A eine der Lage nach bestimmte gerade Linie sein.

Analysis.

Weil AC.ML = AB.ML+BC.ML
und AD.NM = AB.NM+BD.NM,
so folgt, daß
AB . KL = AB(ML+NM)+BC.ML+BD.NM
u. AB.KN = BC . ML + BD . NM.
Nehmet MO, so daß
BC : FD = NM : MO;
alsd. ist BC . MO = BD . MN,
woraus AB . KN = BC(ML+MO)=BC.OL
und AB : BC = OL : KN.

Es folgt hieraus, daß das Verh. von AB zu BC bestimmt ist; da aber der Tr. BCE der Gattung nach bekannt ist, so ist das Verh. von BE zu BC gegeben, folglich ist das Verh. von AB zu BE bekannt; und weil der eingeschlossene W. ABE gegeb. ist, so sieht man, daß der Tr. BAE der Gattung nach bestimmt ist, welches so viel sagen will als, daß die gr. L. AE der Lage nach bestimmt ist.

Synthesis.

Wenn Ihr auf EH einen beliebigen P. H genommen habt, so zieht HGF unter der gegebenen Neigung; nehmet MO von solcher Länge, daß FG:FH=MC:MO und verl. HF um eine hinreichende Grß. FI, so daß
KN : OL = FG : IF;
EI ist die gesuchte gerade Linie. Denn
BC : AB = FG : IF = NK : OL
und AB . KN = BC . OL;

aber BC : BD = FG : EH
= NM : MO,
ithin BC . MO = BD . MN.
olgl. AB . KN = BC . OL = BC (MO + ML) =
C . ML + BD . MN = BC . ML + MN (AD − AB);
oraus hervorgehet, daß
AB . KL = AB . ML + BC . ML
+ AD . NM = AC . ML + AD . NM.

X. Satz.

Lehrsatz.

Sind vier gerade Linien, die in einem Punkt ſammenlaufen, der Lage nach gegeben, und ne fünfte gerade Linie ſchneidet ſie unter einem ſtändigen Winkel, ſo daß die Summe der lectangel aus ihrem erſten und zweiten Abſchnitt it gegebenen Linien gleich der Summe der Rectngel aus ihrem dritten und vierten Abſchnitte it andern gegeb. Linien ſei, ſo wird der Punkt, on welchem an alle Abſchnitte genommen ſind, ine gerade Linie zum Orte haben.

Wenn ABCDE die vier Linien FG, FH, T und FK (Fig. 10) unter einem beſtändigen Winkel ſchneidet, ſo daß AB . MN + AC . NO = D . OP + AE . PQ, ſo wird, wenn die vier geraden

Linien MN, NO, OP, PQ gegeben ſind, der Punkt A eine der Lage nach beſtimmte gerade Linie durchlaufen.

Analyſis.

Weil AB.MN+AC.NO = AD.OP+AE.PQ,

ſo folgt hieraus, daß

AB.MO+BC.NO = AB.OQ+BD.OP+BE.PQ

u. folgl. AB.MQ+BC.NO = BD.OP+BE.PQ.

Machet BD : BC = NO : OR

und BD : BE = PQ : PS,

alsdann iſt BD . OR = BC . NO

und BD . PS = BE . PQ,

woraus hervorgeht, daß

AB.MQ+BD.OR = BD.OP+BD.PS

oder AB . MQ = BD.SR,

d. h. AB : BD = SR : MQ.

Da der Tr. BDF der Gattung nach gegeben iſt, ſo iſt das Verh. von AB zu BF beſtimmt, und da überdem der W. ABF beſtändig iſt, ſo iſt klar, daß der Tr. BAF gleichfalls der Gattung nach beſtimmt iſt, oder welches einerlei, daß die gerade Linie AF der Lage nach beſtimmt iſt.

Syntheſis.

Nachdem auf FK ein beliebiger Punkt K genommen, ſo ziehet KIHG unter gegebener Neigung; machet

$$OR = \frac{GH.NO}{GI} \text{ u. } PS = \frac{GK.PQ}{GI},$$

und

d verl. KG um GL, ſo daß

$$MQ : SR = GI : GL;$$

ist der verlangte Ort.

In der That $BD : BC = GI : GH$

$$= NO : OR$$

und $BD \cdot OR = BC \cdot NO;$

ferner $BD : BE = GI : GK = PQ : PS;$

alſo $BD \cdot PS = BE \cdot PQ;$

nachgehends $MQ : SR = GI : GL = BD : AB,$

mithin $AB \cdot MQ = BD \cdot SR.$

ſo $AB \cdot MQ + BC \cdot NO = BD \cdot SR + BD \cdot OR =$

$D \cdot SO = BD \cdot PS + BD \cdot OP = BE \cdot PQ + BD \cdot OP.$

dirt man zu den beiden Seiten der Gleich. das Prod.

$B \cdot OQ$, welches gleich $AB \cdot NQ + AB \cdot NO$ ist oder

$AB \cdot PQ + AB \cdot OP$, ſo findet man wegen $MO = MN$

NO, daß $AB \cdot MN + AC \cdot NO = AD \cdot OP + AE \cdot PQ.$

XI. Satz.

Lehrſatz.

Wenn eine der Lage nach gegebene gerade nie von zwei andern geraden Linien unter gebenen Neigungen geſchnitten wird und ſo, ß auf ihr von zwei fixen Punkten ausgegangen, bſchnitte enthalten ſind, deren Verhältniß be indig iſt, ſo hat der Treffpunkt der zwei be glichen gr. L. zum Orte eine beſtimmte gr. L.

AB und AC (Fig. 11) sind so gezogen, daß die Winkel ABF und ACF und das Verhältniß der Abschnitte BD, CE, von den fixen Punkten D und E angerechnet, beständig sind; der Ort des Punktes A ist eine bestimmte gerade Linie.

Analysis.

Machet, daß FD zu FE in dem gegebenen Verh. sei, und ziehet FA.

Weil FD : FE = DB : EC,

so folgt hieraus, daß

FD ; FE = FB : FC;

folglich ist das Verh. von FB zu FC und das von FB zu BC bestimmt.

Da aber die W. FBA und FCA gegeben sind, so ist der Tr. BAC unleugbar der Gattung nach gegeben; folgl. ist das Verh. von AB zu BC gegeben; woraus folgt, daß es eben so mit dem Verh. von FB zu AB ist. Es gehet hieraus hervor, daß der Tr FBA der Gattung nach bestimmt ist oder daß die gerade L. FA der Lage nach bestimmt ist.

Synthesis.

Nachdem der P. F so genommen, daß FD zu FE in dem gegebenen Verh. sei, so ziehet DG u. EG so, daß sie mit FI W. bilden, die respect. gleich den gegebenen W. und verbindet ihren Treffp. G mit F; FGH ist der gesuchte Ort.

Um es zu beweisen, ziehet durch einen bel. P. A in FH die gr. L. AB u. AC resp. prll. zu DG und GE, welche folgl. mit FI W. machen, die gleich dem gegeb. W. Es folgt aus dieser Constr., daß FG : FA = FD : FB = FE : FC oder auch FD : FE = FB : FC und folgl. DB : EC = FD : FE, d. h. in dem gegebenen Verhältniß.

XII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zieht, deren Längen unter sich in einem beständigen Verhältniß sind, so wird der Treffpunkt dieser Linien zum Ort eine gerade Linie oder einen bestimmten Kreis haben.

Die durch die fixen Punkte A u. B (Fig. 12 und 12 bis) gezogenen Linien AC und BC sind in einem bestimmten Verhältniß; der Ort des Durchschnittspunktes C ist eine gerade Linie oder ein Kreis.

Erster Fall. Wenn das gegebene Verhältniß das der Gleichheit ist, so ist der Ort von B (Fig. 12) eine gerade Linie.

Analysis.

Nehmet die Mitte E von AB und ziehet EC. Da

die Tr. ACE und BCE ihre drei Seiten einzeln genommen gleich haben, so sind sie congr., welches beweist, daß der W. AEC gleich ist BEC d. h. daß EC perpd. auf AB und folgl. der Lage nach bestimmt ist.

Synthesis.

Der in der Mitte von AB errichtete Prpd. EC ist der gesuchte Ort. Denn wenn man aus einem beliebigen P. C in dieser gr. L. zwei andere L. zu den P. A und B zieht, so ist es leicht zu sehen, daß sie gleich sind.

Zweiter Fall. Wenn das gegebene Verhältniß nicht gleich der Einheit ist, so ist der Ort von C ein Kreis. (Fig. 12 bis).

Analysis.

Ziehet CD, welche mit BC einen W. gleich BAC macht und AB verlängert in D trifft.

Die Tr. DAC und DCB, welche den W. in D gemein und die W. in A und in C gleich haben, sind ähnlich; mithin

$$AD : AC = DC : BC$$

oder auch $AD : DC = AC : BC$

d. h. in dem gegeb. Verhältniß. Aber

$$AD : DC = DC : DB;$$

es ist also AD zu BD in dem verdoppelten Verh. von AD zu DC oder $= AD^2 : DC^2$; da dieses letzte Verh. gegeb. ist, so ist es das andere auch. Folgl. sind BD und der P. D bestimmt; woraus folgt, daß DC auch

estimmt und beständig ist, welches bedeutet, daß der P. in dem Umfange des aus D als Mittelpunkt mit DC ls Halbm. beschriebenen Kr. ist.

Synthesis.

Theilet AB in E in dem gegeb. Verh. und nehmet en P. D so, daß ED zu BD in demselben Verh. sei. Der aus D mit DE beschr. Kr. ist der gesuchte Ort.

In der That, weil

$$AE : BE = ED : BD,$$

hat man AD : ED oder DC = ED oder DC : BD; lso sind die Tr. DAC und DCB, da sie einen zwischen rop. Seiten enthaltenen gemeinsch. W. haben, ähnl. u.

$$AC : BC = AD : DC \text{ oder } ED$$

. h. in dem gegeb. Verhältniß.

Anmerk. Weil in dem zweiten Fall AC : BC = AD : ED, so sieht man, daß, je nachdem das Verh. von AC zu BC sich der Einheit nähert, der Mittelp. D sich immer mehr und mehr von A und von E entf. wird, und der P. E wird immerwähr. suchen, mit der Mitte von AC zusammen zu fallen; bei der Grenze d. h., wenn $\frac{AB}{BC}$ gleich der Einheit sein wird, wird der Bogen CE mit seiner Tang. zusammenfallen, welcher alsdann eine gerade perpd. Linie auf der Mitte von AB sein wird.

Man sieht hierdurch, daß der erste Fall aus dem zweiten abgeleitet werden kann.

XIII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein beweglicher Punkt dieser Bedingung unterworfen ist, daß das Quadrat seiner Entfernung von einem fixen gegebenen Punkt gleich einem Rectangel aus seiner Entfernung von einer fixen geraden Linie und von einer andern gegebenen Linie ist, so ist der Ort eine Peripherie von einem bestimmten Kreise.

Der Punkt A und die gerade Linie CD (Fig. 13) sind in einer bestimmten Lage; man nimmt an, daß das Quadrat von BA gleich sei dem Rectangel aus dem Perpendikel BC und der geraden Linie K; man muß beweisen, daß der Ort von B eine Peripherie von einem bestimmten Kreise ist.

Analysis.

Ziehet DAF perl. zu CB, machet $AO = \frac{1}{2}K$, nehmet die Mitte von AO in G, ziehet BO und fället den Perpd BF.

Weil G die Mitte von AO,

so ist $OB^2 - AB^2$

oder $AB'^2 - OB'^2 = 2AO \cdot GF = K \cdot GF$;

aber $AB^2 = K \cdot BC = K \cdot DF$,
also $OB^2 = K \cdot DG$.

Da DG gegeben ist, so ist OB bestimmt, und da einer von den Endp. O dieser gr. L. bestimmt ist, so muß der andere in der Periph. BB'H liegen.

Synthesis.

Nachdem DA parallel zu CB gezogen, machet $AO = \frac{1}{2}K$, $AG = \frac{1}{2}AO$ und $OH = \sqrt{K.DG}$; der aus O mit OH beschr. Kr. ist der verlangte Ort.

Denn $OB^2 - AB^2$ oder $AB'^2 - OB'^2 = 2AO.GF = K.GF$; und da durch Constr. OH^2 oder $OB^2 = K.DG$, so folgt hieraus, daß

$$AB^2 = K \cdot DF = K \cdot BC.$$

Zusatz. Wenn der gegebene P. A in DC liegt d. h., wenn er mit D zusammenfällt, so ist

$$DG = \frac{1}{2}K \text{ und } OH = \frac{1}{2}K$$

d. h., der Kreis geht durch D; in diesem Falle ist AB eine Sehne und ihr Qdrt. ist gl. einem Rect. aus dem Segm. DF und dem Durchm. K, welches man à priori wußte.

XIV. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zieht, die sich schneiden und so beschaffen sind, daß der Unterschied vom Quadrate

der einen und einem gegebenen Raum in einem beſtändigen Verh. mit dem Quadrate der andern iſt, ſo iſt der Ort des Durchſchnitts dieſer geraden Linie eine beſtimmte Kreisperipherie.

Es ſeien AC und BC (Fig. 14) die beiden beweglichen Linien, und man nehme an, daß das Rectangel AC . AD gleich dem gegebenen Raum iſt; wenn alsdann die Differenz zwiſchen dem Quadrate AC und dieſes Rectangels in einem beſtimmten Verhältniß mit dem Quadrate von BC iſt, ſo wird der Ort eine beſtimmte Kreisperipherie ſein.

Analyſis.

Machet, daß AE zu BE in dem gegebenen Verh. ſei, ziehet CE und BD, verl. CB, bis ſie den um den Tr. ADB beſchr. Kreis trift, und ziehet AF.

Da das Rect. AC . BC gl. FC . BC iſt, ſo folgt hieraus, daß FC . BC zu dem Quadrat von BC oder daß FC zu BC in dem Verh. von AE zu BE iſt; folglich iſt AF prll. CE, und der W. ECB iſt gleich AFB d. h. gleich BDC. Durch die P. C, D, B beſchreibe einen Kreis, welcher AB in G ſchneiden wird, und ziehet CG und DG; alsdann iſt das Rect. BA . AG gl. CA . AD oder gleich dem gegeb. Raum, woraus folgt, daß der Punkt G beſtimmt iſt, ſo wie auch AG. Man

ht auch, daß der W. CDB oder ECB gleich CGB ist; so sind die Tr. BEC und CEG ähnl. und

$$GE : CE = CE : BE;$$

woraus $CE^2 = GE \cdot BE$.

Dieses letzte Result. beweist, daß CE eine bestimmte nie ist, und folgl., daß der Ort des P. C ein Kr., n welchem E der Mittelp. ist.

Synthesis.

Machet das Rect. AB . AG gleich dem gegebenen aum und $\frac{AE}{BE}$ gleich dem gegeb. Verh.; nehmet eine ittlere Prop. EH zwischen GE und BE; der aus E s Mittelp. mit EH als Halbm. beschr. Kreis ist der rlangte Ort.

Um es zu beweisen, so beschr. durch die P. A, D, und durch die P. C, B, G Kreise, verl. CB bis F, nd ziehet AF, CG, DG.

Weil $GE \cdot BE = HE^2$, so ist

:E : HE oder CE = HE oder CE : BE,

nd folgl. sind die Tr. GEC und CEB ähnl., woraus olgt, daß die Winkel EGC und ECB gleich sind. Aber :GC = CDB = AFB, mithin ECB = AFB und die , CE und AF sind prll. Folgl.

$$AE : BE = FC : BC = FC \cdot BC \text{ oder } AC \cdot CD$$

der $AC(AC - AD) : BC^2$. Aber $AD \cdot AC = AB \cdot AG$ = dem gegeb. Raum; also die Diff. zwischen dem Qdrt. on AC u. diesem Raum, welcher gl. AC . AD ist, ist zu em Qdrt. von BC in dem gegeb. Verh. von AE zu BE,

Anmerk. Der vorh. Lehrsatz, auf seine äußersten Fälle angewandt, begreift mehrere besondere Sätze.

Wenn man also annimmt, daß das gegeb. Verh. gleich der Einheit sei, so wird der gegeb. Raum gleich der Summe oder gleich der Diff. der Qdrt. von AC u. BC sein, je nachdem dieser Raum größer oder kleiner als AC^2 sein wird. Wenn er das Qdrt. von AC übertrifft, so fällt der Mittelp. E mit der Mitte von AB zusammen, wie im ersten Falle des XVII. Satzes dieses Buchs, Seite 155.

Wenn aber das Qdrt. von AC den gegeb. Raum übersteigt, so ist das Verh. von AE zu BE das der Gleichheit; der Mittelp. E, der alsdann über B hinaus liegt, muß in unendlicher Entfernung liegen, und folgl. fällt der Bog. HC mit seiner Tang. zusammen, die auf der Mitte von GB perpd. ist, wie in dem folgenden Satze.

Ferner, wenn der gegebene Raum Null angenommen wird, so ist das Verhältniß von AC^2 zu BC^2 gegeben, u. folgl. ist es das von AC zu BC auch; in diesem Falle ist AG Null, der P. G fällt mit A zusammen, und der Mittelp. und der Halbm. des gesuchten Kreises sind bestimmt, auf dieselbe Art als in dem XII. Satze, Seite 147.

XV. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen gegebenen Punkt zwei gerade Linien zieht, die sich so schneiden, daß die Differenz ihrer Quadrate beständig sei,

so beschreibet ihr Durchschnittspunkt eine der Lage nach bestimmte gerade Linie.

Die geraden Linien AC und BC (Fig. 25), durch die Punkte A und B gezogen, sind so beschaffen, daß die Differenz ihrer Quadrate constant ist; der Ort ihres Durchschnittspunkts C ist eine bestimmte gerade Linie.

Analysis.

Fället den Perpend. CD auf AB und nehmet die Mitte von AB in E. Es ist klar, daß $AC^2 - BC^2 = 2AB.ED$, also ist das Rect. AB.ED und folglich seine Seite ED bestimmt; ist daher der Punkt D u. der Perpd. CD ist daher auch bestimmt, woraus folgt, daß CD der gesuchte Ort ist.

Synthesis.

Nehmet die Mitte E von AB und machet das Rect. $2AB.ED$ gleich dem gegeb. Raum; der Perpd. DC ist der verlangte Ort.

Denn $AC^2 - BC^2 = AB.2ED$ = dem gegebenen Raum.

XVI. Satz.

Lehnsatz.

Wenn man auf einer in C so in zwei Theile getheilten geraden Linie AB, daß $BC = n.AC$,

einen beliebigen Punkt D nimmt, so wird man die Gleichung haben

$$n.AD^2 + BD^2 = AB.BC + (n+1)CD^2.$$

Um es zu beweisen, so beschr. über AB einen Halbkreis und errichtet den Perpd. CE, ziehet AE, BE u. die gerade L. DF prll. zu CE, welche AE in F begegnet; ziehet BF.

Da der W. AEB ein Rechter ist, so ist

$$AC : CE = CE : BC$$

und folgl. $AC : BC = AC^2 : CE^2$;

aber $BC = n \cdot AC$,

folglich $CE^2 = n \cdot AC^2$,

ferner $AB : AE = AE : AC$

und $AB : AC = AE^2 : AC^2$,

und weil $AB = (n+1)AC$,

so muß $AE^2 = (n+1)AE^2$ sein.

Jetzt, da CE und DF prll sind, haben wir $CE : DF = AC : AD$ u. $CE^2 : DF^2 = AC^2 : AD^2$; oder

$$CE^2 = nAC^2, \text{ also } DF^2 = nAD^2.$$

Aber $BE^2 = AB \cdot BC$, und weil die Tr. BDF u. BEF rechtw. sind, so ist

$$BD^2 + DF^2 = BF^2 = BE^2 + EF^2$$
$$= BE^2 + CD^2 + (EC - FD)^2;$$

woraus man durch Substitutionen ableitet

$$nAD^2 + BD^2 = AB \cdot BC + (n+1)CD^2.$$

XVII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch mehrere gegebene fixe unkte gerade Linien zieht, die ſich alle in nem Punkt endigen, und ſo, daß die Summe rer Quadrate beſtändig gleich einem gegebenen aum iſt, ſo wird ihr Durchſchnittspunkt zum rte einen beſtimmten Kreis haben.

Erſter Fall. Wenn die gegebenen Punkte ur der Zahl nach zwei ſind.

Nehmet an, daß die durch die Punkte A nd B gezogenen geraden Linien AP und BP Fig. 17) ſo beſchaffen ſeien, daß die Summe rer Quadrate immer gleich ſei einem gegebenen aum, ſo iſt der Ort ihres Durchſchnittspunkts n beſtimmter Kreis.

Analyſis.

Nehmet die Mitte von AB in O und ziehet OP, o wird man haben

$$AP^2 + BP^2 = 2AO^2 + 2OP^2;$$

ſo iſt $AO^2 + OP^2$ beſtimmt; da aber AO und ihr uadrat beſtimmt ſind, ſo iſt das Quadrat von der Li e OP und dieſe L. ſelbſt es auch.

die Tr. ACE und BCE ihre drei Seiten einzeln genommen gleich haben, so sind sie congr., welches beweist, daß der W. AEC gleich ist BEC d. h. daß EC perpd. auf AB und folgl. der Lage nach bestimmt ist.

Synthesis.

Der in der Mitte von AB errichtete Prpd. EC ist der gesuchte Ort. Denn wenn man aus einem beliebigen P. C in dieser gr. L. zwei andere L. zu den P. A und B zieht, so ist es leicht zu sehen, daß sie gleich sind.

Zweiter Fall. Wenn das gegebene Verhältniß nicht gleich der Einheit ist, so ist der Ort von C ein Kreis. (Fig. 12 bis).

Analysis.

Ziehet CD, welche mit BC einen W. gleich BAC macht und AB verlängert in D trifft.

Die Tr. DAC und DCB, welche den W. in D gemein und die W. in A und in C gleich haben, sind ähnlich; mithin

$$AD : AC = DC : BC$$

oder auch $AD : DC = AC : BC$

d. h. in dem gegeb. Verhältniß. Aber

$$AD : DC = DC : DB;$$

es ist also AD zu BD in dem verdoppelten Verh. von AD zu DC oder $= AD^2 : DC^2$; da dieses letzte Verh. gegeb. ist, so ist es das andere auch. Folgl. sind BD und der P. D bestimmt; woraus folgt, daß DC auch

estimmt und beständig ist, welches bedeutet, daß der P. in dem Umfange des aus D als Mittelpunkt mit DC ls Halbm. beschriebenen Kr. ist.

Synthesis.

Theilet AB in E in dem gegeb. Verh. und nehmet en P. D so, daß ED zu BD in demselben Verh. sei. Der aus D mit DE beschr. Kr. ist der gesuchte Ort.

In der That, weil

$$AE : BE = ED : BD,$$

hat man AD : ED oder DC = ED oder DC : BD; lso sind die Tr. DAC und DCB, da sie einen zwischen rop. Seiten enthaltenen gemeinsch. W. haben, ähnl. u.

$$AC : BC = AD : DC \text{ oder } ED$$

h. in dem gegeb. Verhältniß.

Anmerk. Weil in dem zweiten Fall AC : BC = AD : ED, so sieht man, daß, je nachdem das Verh. von AC zu BC sich der Einheit nähert, der Mittelp. D sich immer mehr und mehr von A und von E entf. wird, und der P. E wird immerwähr. suchen, mit der Mitte von AC zusammen zu fallen; bei der Grenze d. h., wenn $\frac{AB}{BC}$ gleich der Einheit sein wird, wird der Bogen CE mit seiner Tang. zusammenfallen, welcher alsdann eine gerade perpd. Linie auf der Mitte von AB sein wird.

Man sieht hierdurch, daß der erste Fall aus dem zweiten abgeleitet werden kann.

XIII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn ein beweglicher Punkt dieser Bedingung unterworfen ist, daß das Quadrat seiner Entfernung von einem fixen gegebenen Punkt gleich einem Rectangel aus seiner Entfernung von einer fixen geraden Linie und von einer andern gegebenen Linie ist, so ist der Ort eine Peripherie von einem bestimmten Kreise.

Der Punkt A und die gerade Linie CD (Fig. 13) sind in einer bestimmten Lage; man nimmt an, daß das Quadrat von BA gleich sei dem Rectangel aus dem Perpendikel BC und der geraden Linie K; man muß beweisen, daß der Ort von B eine Peripherie von einem bestimmten Kreise ist.

Analysis.

Ziehet DAF prll. zu CB, machet $AO = \frac{1}{2}K$, nehmet die Mitte von AO in G, ziehet BO und fället den Perpd BF.

Weil G die Mitte von AO,

so ist $OB^2 - AB^2$

oder $AB'^2 - OB'^2 = 2AO \cdot GF = K \cdot GF$;

aber $AB^2 = K \cdot BC = K \cdot DF$,
also $OB^2 = K \cdot DG$.

Da DG gegeben ist, so ist OB bestimmt, und da einer von den Endp. O dieser gr. L. bestimmt ist, so muß der andere in der Periph. BB'H liegen.

Synthesis.

Nachdem DA parallel zu CB gezogen, machet $AO = \frac{1}{2}K$, $AG = \frac{1}{2}AO$ und $OH = \sqrt{K.DG}$; der aus O mit OH beschr. Kr. ist der verlangte Ort.

Denn $OB^2 - AB^2$ oder $AB'^2 - OB'^2 = 2AO.GF = K.GF$; und da durch Constr. OH^2 oder $OB^2 = K.DG$, so folgt hieraus, daß

$$AB^2 = K \cdot DF = K \cdot BC.$$

Zusatz. Wenn der gegebene P. A in DC liegt d. h., wenn er mit D zusammenfällt, so ist

$$DG = \frac{1}{2}K \text{ und } OH = \frac{1}{2}K$$

d. h., der Kreis geht durch D; in diesem Falle ist AB eine Sehne und ihr Qdrt. ist gl. einem Rect. aus dem Segm. DF und dem Durchm. K, welches man à priori wußte.

XIV. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zieht, die sich schneiden und so beschaffen sind, daß der Unterschied vom Quadrate

der einen und einem gegebenen Raum in einem beſtändigen Verh. mit dem Quadrate der andern iſt, ſo iſt der Ort des Durchſchnitts dieſer geraden Linie eine beſtimmte Kreisperipherie.

Es ſeien AC und BC (Fig. 14) die beiden beweglichen Linien, und man nehme an, daß das Rectangel AC . AD gleich dem gegebenen Raum iſt; wenn alsdann die Differenz zwiſchen dem Quadrate AC und dieſes Rectangels in einem beſtimmten Verhältniß mit dem Quadrate von BC iſt, ſo wird der Ort eine beſtimmte Kreisperipherie ſein.

Analyſis.

Machet, daß AE zu BE in dem gegebenen Verh. ſei, ziehet CE und BD, verl. CB, bis ſie den um den Tr. ADB beſchr. Kreis trift, und ziehet AF.

Da das Rect. AC . BC gl. FC . BC iſt, ſo folgt hieraus, daß FC . BC zu dem Quadrat von BC oder daß FC zu BC in dem Verh. von AE zu BE iſt; folglich iſt AF prll. CE, und der W. ECB iſt gleich AFB d. h. gleich BDC. Durch die P. C, D, B beſchreibe einen Kreis, welcher AB in G ſchneiden wird, und ziehet CG und DG; alsdann iſt das Rect. BA . AG gl. CA . AD oder gleich dem gegeb. Raum, woraus folgt, daß der Punkt G beſtimmt iſt, ſo wie auch AG. Man

sieht auch, daß der W. CDB oder ECB gleich CGB ist; also sind die Tr. BEC und CEG ähnl. und

$$GE : CE = CE : BE;$$

woraus $CE^2 = GE \cdot BE$.

Dieses letzte Result. beweist, daß CE eine bestimmte Linie ist, und folgl., daß der Ort des P. C ein Kr., von welchem E der Mittelp. ist.

Synthesis.

Machet das Rect. AB . AG gleich dem gegebenen Raum und $\frac{AE}{BE}$ gleich dem gegeb. Verh.; nehmet eine mittlere Prop. EH zwischen GE und BE; der aus E als Mittelp. mit EH als Halbm. beschr. Kreis ist der verlangte Ort.

Um es zu beweisen, so beschr. durch die P. A, D, B und durch die P. C, B, G Kreise, berl. CB bis F, und ziehet AF, CG, DG.

Weil $GE \cdot BE = HE^2$, so ist

GE : HE oder CE = HE oder CE : BE,

und folgl. sind die Tr. GEC und CEB ähnl., woraus folgt, daß die Winkel EGC und ECB gleich sind. Aber EGC = CDB = AFB, mithin ECB = AFB und die L. CE und AF sind prll. Folgl.

$$AE : BE = FC : BC = FC \cdot BC \text{ oder } AC \cdot CD$$

oder $AC(AC - AD) : BC^2$. Aber $AD \cdot AC = AB \cdot AG$ = dem gegeb. Raum; also die Diff. zwischen dem Qdrt. von AC u. diesem Raum, welcher gl. AC . AD ist, ist zu dem Qdrt. von BC in dem gegeb. Verh. von AE zu BE,

Anmerk. Der Verf. Lehrsatz, auf seine äußersten Fälle angewandt, begreift mehrere besondere Sätze.

Wenn man also annimmt, daß das gegeb. Verh. gleich der Einheit sei, so wird der gegeb. Raum gleich der Summe oder gleich der Diff. der Qdrt. von AC u. BC sein, je nachdem dieser Raum größer oder kleiner als AC² sein wird. Wenn er das Qdrt. von AC übertrifft, so fällt der Mittelp. E mit der Mitte von AB zusammen, wie im ersten Falle des XVII. Satzes dieses Buchs, Seite 155.

Wenn aber das Qdrt. von AC den gegeb. Raum überzeugt, so ist das Verh. von AE zu BE das der Gleichheit; der Mittelp. E, der alsdann über B hinaus liegt, muß in unendliche Entfernung liegen, und folgl. fällt der Bog. HC mit seiner Tang. zusammen, die auf der Mitte von GB perpend. ist, wie in dem folgenden Satze.

Ferner, wenn der gegebene Raum Null angenommen wird, so ist das Verhältniß von AC² zu BC² gegeben, u. folgl. ist es das von AC zu BC auch; in diesem Falle ist AG Null, der P. G fällt mit A zusammen, und der Mittelp. und der Halbm. des gesuchten Kreises sind bestimmt, auf dieselbe Art als in dem XII. Satze, Seite 147.

XV. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen gegebenen Punkt zwei gerade Linien zieht, die sich so schneiden, daß die Differenz ihrer Quadrate beständig sei,

so beschreibet ihr Durchschnittspunkt eine der Lage nach bestimmte gerade Linie.

Die geraden Linien AC und BC (Fig. 85), durch die Punkte A und B gezogen, sind so beschaffen, daß die Differenz ihrer Quadrate constant ist; der Ort ihres Durchschnittspunkts C ist eine bestimmte gerade Linie.

Analysis.

Fället den Perpend. CD auf AB und nehmet die Mitte von AB in E. Es ist klar, daß $AC^2 - BC^2 = 2AB \cdot ED$, also ist das Rect. AB. ED und folglich seine Seite ED bestimmt; ist daher der Punkt D u. der Perpd. CD ist daher auch bestimmt, woraus folgt, daß CD der gesuchte Ort ist.

Synthesis.

Nehmet die Mitte E von AB und machet das Rect. $2AB \cdot ED$ gleich dem gegeb. Raum; der Perpd. DC ist der verlangte Ort.

Denn $AC^2 - BC^2 = AB \cdot 2ED =$ dem gegebenen Raum.

XVI. Satz.

Lehnsatz.

Wenn man auf einer in C so in zwei Theile getheilten geraden Linie AB, daß $BC = n \cdot AC$,

einen beliebigen Punkt D nimmt, so wird man die Gleichung haben

$$n.AD^2 + BD^2 = AB.BC + (n+1)CD^2.$$

Um es zu beweisen, so beschr. über AB einen Halbkreis und errichtet den Perpd. CE, ziehet AE, BE u. die gerade L. DF prll. zu CE, welche AE in F begegnet; ziehet BF.

Da der W. AEB ein Rechter ist, so ist

$$AC : CE = CE : BC$$

und folgl. $AC : BC = AC^2 : CE^2$;

aber $BC = n \cdot AC$,

folglich $CE^2 = n \cdot AC^2$,

ferner $AB : AE = AE : AC$

und $AB : AC = AE^2 : AC^2$,

und weil $AB = (n+1)AC$,

so muß $AE^2 = (n+1)AE^2$ sein.

Jetzt, da CE und DF prll sind, haben wir $CE : DF = AC : AD$ u. $CE^2 : DF^2 = AC^2 : AD^2$; oder

$$CE^2 = nAC^2, \text{ also } DF^2 = nAD^2.$$

Aber $BE^2 = AB \cdot BC$, und weil die Tr. BDF u. BEF rechtw. sind, so ist

$$BD^2 + DF^2 = BF^2 = BE^2 + EF^2$$
$$= BE^2 + CD^2 + (EC - FD)^2;$$

woraus man durch Substitutionen ableitet

$$nAD^2 + BD^2 = AB \cdot BC + (n+1)CD^2.$$

XVII. Satz.

Lehrsatz.

Wenn man durch mehrere gegebene fixe Punkte gerade Linien zieht, die sich alle in einem Punkt endigen, und so, daß die Summe ihrer Quadrate beständig gleich einem gegebenen Raum ist, so wird ihr Durchschnittspunkt zum Orte einen bestimmten Kreis haben.

Erster Fall. Wenn die gegebenen Punkte nur der Zahl nach zwei sind.

Nehmet an, daß die durch die Punkte A und B gezogenen geraden Linien AP und BP (Fig. 17) so beschaffen seien, daß die Summe ihrer Quadrate immer gleich sei einem gegebenen Raum, so ist der Ort ihres Durchschnittspunkts ein bestimmter Kreis.

Analysis.

Nehmet die Mitte von AB in O und ziehet OP. So wird man haben

$$AP^2 + BP^2 = 2AO^2 + 2OP^2;$$

also ist $AO^2 + OP^2$ bestimmt; da aber AO und ihr Quadrat bestimmt sind, so ist das Quadrat von der Linie OP und diese L. selbst es auch.

Folgl. ist der Ort von P ein Kreis, dessen Mittelp. O und OP der Halbmesser.

Synthesis.

Nehmet die Mitte O von AB, suchet eine gr. L. AF, deren Quadrat gleich sei der Hälfte vom gegeb. Raume, und machet $OE^2 = AF^2 - AO^2$; der aus dem Mittelp. O mit dem Halbmesser OE beschr. Kreis ist der verlangte Ort.

Denn $AP^2 + BP^2 = 2AO^2 + 2OP^2 = 2AO^2 + 2OE^2 = 2AF^2 =$ dem gegebenen Raum.

Zweiter Fall. Wenn die gegebenen P. der Zahl nach drei sind.

Da die geraden L. AP, BP, CP, die durch Punkte A, B, C gezogen, so beschaffen sind, daß die Summe ihrer Quadrate beständig gleich einem gegebenen Raum ist, so ist der Ort des Durchschnittspunkts P ein bestimmter Kr. (Fig. 17 bis.)

Analysis.

Nehmet die Mitte von AB in E, so ist

$$AP^2 + BP^2 = 2AE^2 + 1EP^2;$$

folgl. $AP^2 + BP^2 + CP^2 = 2AE^2 + 2EP^2 + CP^2$.

Jetzt $2AE^2 = AB \cdot BE$; und wenn man ferner auf EC den Perpd. PF fällt, so ist klar, daß

$$2EP^2 = 2EF^2 + 2PF^2 \text{ u. } CP^2 = PF^2 + CF^2;$$

folgl. $AP^2 + BP^2 + CP^2 = AB \cdot BE + 3PF^2 + 2EF^2 + CF^2$.

Nehmet EO, das Drittel von EC und ziehet PO; wird, dem vorh. Lehnſatz gemäß,

$$2EF^2 + CF^2 = EC.CO + 3OF.$$

Alſo $AP^2 + BP^2 + CP^2 =$

$AB . BE + EC . CO + 3PF^2 + 3OF^2 =$

$AB . BE + EC . CO + 3PO^2.$

ie Punkte E und O ſind aber unleugbar beſtimmt; en ſo iſt mit den Rectangel AB . BE und EC . CO; leraus folgt, daß $3OP^2$ und OP gleichfalls beſtimmt d; folgl. hat der P. P den aus O mit OP beſchr. Kr. i Ort.

Syntheſis.

Nehmet $AE = \frac{1}{4}AB$, $EO = \frac{1}{3}EC$ und ſuchet eine . L. OP, ſo daß ihr Qdrt. gleich $\frac{1}{3}$ vom Ueberſchuß s gegebenen Raumes über die Summe der Rectangel B . BE und EC . CO iſt; der geſuchte Ort iſt ein r., deſſen Mittelp. O und PO der Halbm. iſt.

Denn $3PO^2 = 3PF^2 + 3OF^2$ oder

$PO^2 + EC.CO = 3PF^2 + EB . CO + 3OF^2$

$= 3PF^2 + 2EF^2 + CF^2$ (Lehnſatz)

$= 2PE^2 + PF^2 + CF^2 = 2PE^2 + CP^2;$

lgl. der gegebene Raum oder

$3PO^2 + AB . BE + EC . CO =$

$2AE^2 + 2PE^2 + CP^2 = AP^2 + BP^2 + CP^2.$

Dritter Fall. Wenn die gegebenen P. r Zahl nach vier ſind.

Wenn die durch die Punkte A, B, C, D

gezogenen geraden Linien AP, BP, CP, DP (Fig. 17ter) so beschaffen sind, daß die Summe ihrer Quadrate beständig gleich einem gegebenen Raum ist, so ist der Ort ihres Durchschnittspunkts ein bestimmter Kreis.

Analysis.

Nehmet $AE = \frac{1}{3}AB$, $EF = \frac{1}{3}EC$ und ziehet PE und PF. Es ist klar, nach dem, was für den vorherg. Fall erwiesen worden, daß

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 =$$
$$AB \cdot BE + EC \cdot CF + 3PF^2, \text{ woraus}$$
$$AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2 =$$
$$AB \cdot BE + EC \cdot CF + 3PF^2 + DP^2.$$

Fället den Perpd. PG auf DF, und Ihr werdet sehen, daß der gegebene Raum gleich ist

$$AB \cdot BE + EC \cdot CF + 3PG^2 + 3FG^2 + PG^2 + DG^2;$$

folglich ist $4PG^2 + 3FG^2 + DG^2$ gleich einem gegebenen Raum.

Machet $FO = \frac{1}{4}DF$ und ziehet PO; alsdann ist nach dem Lehnsatz

$$3FG^2 + DG^2 = FD \cdot DO + 4OG^2.$$

Mithin ist $FD \cdot DO + 4OG^2 + 4PG^2 = FD \cdot DO + 4PO^2$ gleich einem bestimmten Raum; folglich sind $4PO^2$ und PO bestimmt. Da übrigens der P. O gegeben ist, so sieht man, daß der Ort von P ein Kreis ist, der O als Mittelp. und PO als Halbm. hat.

Syn-

Synthesis.

Machet $AE = \frac{1}{4}AB$, $EF = \frac{1}{4}EC$ u. $FO = \frac{1}{4}FD$. Suchet nachgehends die Seite eines Quadr., welches gleich einem um

$$AB \cdot BE + EC \cdot CF + DF \cdot OD$$

erminderten Raum ist, und mit der Hälfte dieser Seite ls Halbm. beschr. aus O als Mittelpunkt einen Kreis, elcher der gesuchte Ort sein wird.

In der That, ziehet PE, PF, PO und fället auf F den Perpd. PG; alsdann ist

$FD \cdot DO + 4PO^2 = FD \cdot DO + 4OG^2 + 4PG^2$
$= 3FG^2 + DG^2 + 4PG^2 = 3FG^2 + 3PG^2 + DP^2$
$= 3PF^2 + DP^2$. Folglich ist

$$AB \cdot BE + EC \cdot CF + 3PF^2 + DP^2$$

leich dem gegebenen Raum. Aber nachdem, was in r Synthesis des vorhergeh. Falles bewiesen ist, ist es ar, daß

$P^2 + BP^2 + CP^2 = AB \cdot BE + EC \cdot CF + 3PF^2$;
lglich ist $AP^2 + BP^2 + CP^2 + DP^2$ gleich dem gebenen Raume.

Wenn man diesen Modus von Beweis verfolgt, ist es leicht, den Satz nach und nach auf eine beliebige nzahl von P. auszudehnen.

Anmerk. Die Eigenschaft, die so eben erwiesen worden, ist der Verallgemeinerung fähig. Wenn also der gegebene Raum, anstatt gleich der Summe der Odrt. von den beweglichen gr. L. zu sein, gleich der Summe der versch. Vielfachen dieser Quadr. ist, so hat der Durchschnittsp. dieser gr. L. noch zum Ort den Umfang eines Kreises.

Man denke ſich andere gerade Linien aus den P. P nach den Mittelp. A, B, C . . . gezogen, und auf dieſen gr. L. andere Mittelp., deren Qdrt. von den Entf. vom P. P mit gegeb. Coeff. multipl. ſind u. reſpect. gl. dem Qdrt. der erſten Entf PA, PB, PC . . . ſeien. Aber dieſe Eigenſch. kann durch eine bloße Ausdehnung des Lehrſ. Seite 155 viel klarer gemacht werden.

Es ſeien AP und BP (Fig. 16bis) zwei von den beweglichen gr. L., welche durch die fixen P. A und B gehen; nehmet OB = v . OA; alsdann, wenn man PO und den Perpd. PL ziehet, ſo iſt bewieſen worden, daß $v \cdot AL^2 + BL^2 = AB \cdot BO + (v+1)\,OL^2$; ſetzt man auf beiden Seiten $(v+1)\,PL^2$ hinzu, ſo iſt klar, daß

$$v\,(AL^2 + PL^2) + BL^2 + PL^2 = v \cdot AP^2 + BP^2$$
$$= AB \cdot BO + (v+1) + OP^2.$$

Multipl. beide Seiten mit n und nehmet an $nv = m$, ſo werdet Ihr finden, daß $m \cdot AP^2 + nBP^2 = n \cdot AB \cdot BO + (n+m)\,OP$. Durch wiederholte Anwendung dieſes Prinzips kann man beweiſen, daß

$$m \cdot AP^2 + n \cdot BP^2 + p \cdot CP^2 + q \cdot DP^2 + \text{ꝛc.} =$$
$$(m+n+p+q+\text{ꝛc.})\,OP^2 +$$

gewiſſe Vielfache vom gegebenen Rect. ſeien. Folglich hat der Durchſchnittsp. zum Ort eine Kreisperipherie, deren Mittelp. O und deren Halbmeſſer OP iſt. Aber die Eigenſchaft muß beſtehen, wenn man alle dieſe Vielfache von Qdrt. durch einerlei Zahl dividirt, d. h. wenn, anſtatt der Quadrate von beweglichen L., man, die auf ihnen conſtruirten ähnl. Figuren betrachtet.

Wenn der gegeb. Raum gleich iſt der Summe der Rect., ſo reducirt ſich der Kreis auf einen P., weil OP Null wird, und über dieſe Grenze hinaus iſt der Satz unmöglich. Es iſt eben ſo ſichtbar, daß der Mittelpunkt O und der Halbmeſſer OP dieſelben bleiben werden, in welcher Ordnung man die nöthigen Con-

struktionen ausführen mag, um die Lage des Mittelpunkts zu erhalten *).

*) Wenn man diese Constr. aufmerksam untersucht, so ist es leicht, wahrzunehmen, daß der Mittelp. des gesuchten Kreises zu gleicher Zeit der Schwerpunkt vom Systeme der gegeb. sixen P. ist. Diese merkwürdige Eigensch. ist in der schönen Abh. von Huygens, betitelt Horologium oscillatorium, ausgesprochen, und sie liefert ihm ein Beispiel um das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kräfte anzuwenden, welche in der Wirkung der Körper auf einander so wichtig zu betrachten ist.

Der interessante Satz, welchen der Autor so eben erwiesen hat, kann auf eine höchst einfache Art. in seiner ganzen Allgemeinheit durch die analytische Geometrie aufgestellt werden. In der That, es seien (a, b), (a′, b′), (a″, b″) ꝛc. die Coordinaten der gegebenen sixen P.; (x, y) die von einem der P. des gesuchten Orts und m, n, p ꝛc. die gegeb. Vielf. Es ist klar, daß die Qdrt. der L., die man betrachtet, sind $(x-a)^2+(y-b)^2+(x-a')^2+(y-b')^2$ ꝛc.,

und da nach der Hypothese die Summe von den Vielfachen dieser Qdrt. gleich einem bestimmten Maam sein soll, so folgt hieraus, daß die Gleich. des gesuchten Orts ist

$$\left.\begin{array}{l} m(x-a)^2+n(y-b)^2 \\ +n(x-a')^2+n(y-b')^2 \\ +p(x-a'')^2+n(y-b'')^2 \\ +\text{ꝛc.} \qquad +\text{ꝛc.} \end{array}\right\} = \text{Constant.}$$

Bei der bloßen Ansicht dieser Gleich. erkennt man, daß die Coeff. von x^2 und von y^2 gleich sind, und folglich ist der Ort ein Kreisumfang.

C.

Von den Porismen.

Erklärungen.

Das Porismen hat zum Gegenstand zu beweisen, daß man mehrere Größen finden kann, die so beschaffen sind, daß eine gewisse Relation zwischen diesen Größen Statt habe, und eine unendliche Anzahl anderer, die nach einem gegebenen Gesetz genommen sind.

Das Porismen setzt voraus, daß es Bedingungen giebt, welche eine Aufg. unbestimmt machen, d. h., einer unendlichen Anzahl von Aufl. fähig machen.

XVIII. Satz.

Porismen.

Wenn drei Punkte gegeben sind, so kann man einen vierten finden, so daß, wenn man eine gerade Linie durch zieht, die Summe der Entfernung dieser geraden Linie von den ersten zwei

gegebenen Punkten gleich ihrer Entfernung vom dritten Punkte sei.

Es seien A, B, C (Fig. 18) die drei gegebenen Punkte; man kann einen vierten Punkt D finden, so daß, wenn eine beliebige gerade Linie HDI durch diesen Punkt gezogen wird, die Summe der Perpendikel AH und BI gleich sei dem Perpendikel CG.

Analysis.

Durch den P. D ziehet CDK; fället auf diese gr. L. die zwei Perpend. AK, BL, und ziehet AB, welche KC in E begegnet.

Nach dieser Eigenschaft, deren die durch den P. D gehenden gr. L. theilhaftig sind, ist es klar, daß die Entfernung AK und BL von der geraden L. CDK, durch den P. C zu den übrigen zwei P. A und B gezogen gleich sein müssen.

Also sind die rechtw. Tr. AEK und BLE congr. und folgl. AE = BE; mithin ist der Punkt E bestimmt, weil er die Mitte von AB ist.

Ziehet den Perpend. EF; es ist einleuchtend, daß 2EF = AH + BI. Ferner, da CG und EF prll. sind, so ist CD : DE = CG : EF
und CD : 2DE = CG : 2FE oder AH + BI,
aber nach der Hypothese CG = AH + BI, mithin CD = 2DE, und da CE unbestimmt ist, so ist es der P. D auch.

Synthesis.

Machet $AE = \frac{1}{3}AB$ und $ED = \frac{1}{3}EC$; D ist der gesuchte Punkt.

In der That, fället den Perpd. EF.

Weil CG und EF prll. sind, so ist

$$CD : DE = CG : EF;$$

aber $CD = 2DE$, also $CG = 2EF = AH + BI$.

Das Porismen, welches so eben bewiesen worden, kann angesehen werden, als rührte es aus der Aufl. von dieser Aufg. her.

Durch den Punkt M eine gerade Linie MN zu ziehen, so daß die Summe der Perpendikel AH und BI, welche aus den Punkten A und B gefällt werden, gleich sei dem Perpendikel durch C auf der entgegengesetzten Seite.

Der Punkt D findet sich wie vorher, und die Lage von MND ist bestimmt. Aber die Lage dieser gr. Linie wäre ganz und gar unbestimmt, wenn es sich fügte, daß der Punkt M mit D zusammenfiele; in dieser Voraussetzung würde die Aufgabe eine unendliche Anzahl von Aufl. zulassen *).

*) Es ist dienlich, zu bemerken, daß der gesuchte Punkt D der Schwerpunkt vom Systeme der drei P. A, B, C als schwere materielle Punkte betrachtet ist. Welches aus der Art, wie man den P. D findet, hervorgeht; aber dieses kann nach den Eigenschaften dieses P. à priori bewiesen

XIX. Satz.

Porismen.

Wenn ein Kreis und eine gerade Linie gege-
n iſt, ſo kann man einen Punkt finden, ſo daß
be dadurch gelegte gerade Linie und die durch
n Kreis und die gerade Linie begrenzt iſt, in
m geſuchten Punkt in zwei Segmente getheilt
, deren Rectangel beſtimmt iſt.

Die gerade Linie AB (Fig. 19, Tafel 3)
ıd der Kreis HDF ſind der Lage nach gegeben;
an verlangt, einen Punkt F zu beſtimmen, der
ne beliebige gerade Linie EDF in zwei Abſchnitte
eile, die ein beſtimmtes Rectangel einſchließen.

Analyſis.

Durch F ziehet HFG perpd. auf AB.

Nach der Hypotheſe iſt das Rect. HF . FG auch
eich dem gegebenen Raum u. folgl. gl. FD . FE; alſo

$$DF : HF = FG : EE.$$

a die Tr. DFH und GFE alſo einen gleichen Winkel

---

rden. Denn aus dieſer Eigenſchaft gehet offenbar her-
r, daß die Summe der Momente von A, B, C Null,
Betreff jeder durch D gehenden Axe iſt, welches, wie
an weiß, die charakteriſtiſche Eigenſchaft eines Schwer-
nktes iſt.

zwiſchen proport. Seiten haben, ſo ſind ſie ähnlich, und der W. FDH iſt gl. FGE d. h. gl. einem rechten W.; mithin iſt HDF ein Halbkr., der HF als Durchm. hat.

Da der Mittelpunkt C gegeben iſt, ſo iſt der Perpd. HCG auch gegeben, und folgl. iſt der P. F beſtimmt. Da die P. F, G, H beſtimmt ſind, ſo iſt es eben ſo mit dem Rect. HF . FG.

Syntheſis.

Aus dem Mittelp. C fället auf AB den Perpend. HCFG, welcher die Periph. in F begegnet. Dieſer P. F hat die Eigenſchaft, daß wenn man eine beliebige gr. L. durchzieht, welche von der Peripherie u. AB begrenzt wird, ihre beiden Segm. ein beſtimmtes Rect. einſchließen.

In der That, ziehet DH, die Tr. FGE und FDH ſind ähnl.; daher FG : FE = FD : FH,

woraus FE . ED = FG . FH = einem beſtimmten Rectangel.

Dieſes Porismen kann angeſehen werden, als ſei es aus der Aufl. von dieſer Aufg. hervorgegangen.

Durch den P. M eine gerade Linie DMFE ſo zu ziehen, daß das Rectangel aus ihren Abſchnitten DF und FE gleich einem beſtimmten Rectangel ſei.

Wenn der Punkt F wie vorher gefunden iſt, ſo iſt die gr. L. DME gänzlich beſtimmt.

Wenn es ſich aber fügte, daß der P. M mit E zuſammenfällt, ſo hat DE keine beſtimmte Lage mehr

d. h. daß sie die Bedingungen der Aufg. erfüllt, in welcher Richtung sie auch gezogen sein mag.

XX. Satz.

Porismen.

Wenn ein Kreis und ein Punkt gegeben ist, so kann man einen andern Punkt finden, so daß, wenn man aus diesem Punkt und aus dem ersten zwei gerade Linien nach einem beliebigen Punkt der Peripherie zieht, diese zwei geraden Linien immer in einem gegebenen Verhältniß seien.

Wenn die Peripherie ECF und der Punkt A gegeben ist, so kann man einen Punkt B (Fig. 20) finden, so daß die nach dem Punkt C der Peripherie ECF gezogenen Linien AC und BC unter sich in einem bestimmten Verhältniß seien.

Analysis.

Ziehet AB, welche den Kreis in E und F trift; ziehet CE, CF und verlängert AC.

Weil die P. E und F in der Peripherie liegen, so gehet aus der Hypotheſe hervor, daß

$$AC : BC = AE : BE$$

und $$AC : BC = AF : FB.$$

Es folgt hieraus, daß CE den W. ACB halbirt und

es eben so mit CF in Betreff des anliegenden Winkels BCD ist; folgl. ist der Bogen ECF ein Halbkr. Also die gr. L., welche durch den Mittelp. O gehet, ist der Lage nach bestimmt. Jetzt, weil

$$AF : FB = AE : EB$$

oder auch $AF : AE = FB : EB$,

so folgt hieraus, daß, da EF äußerlich und innerlich in einerlei Verh. getheilt ist, EO eine mittlere Proport. zwischen AO und BO oder $EO^2 = AO.BO$ ist. Aber AO und EO sind gegeben, also sind BO und der P. B bestimmt. Ferner, weil

$$AO : EO = EO : BO,$$

so ist klar, daß

$$AE : EB = EQ : BO,$$

d. h. daß die durch A und B zur Peripherie gezogenen Linien unter sich in einem bestimmten Verhältniß gleich $\frac{EO}{BO}$ sind.

Synthesis.

Ziehet AF durch den Mittelpunkt des gegebenen Kr. und machet

$$AO : EO = EO : BO;$$

B ist der gesuchte Punkt.

In der That, ziehet CO. Weil $EO = CO$, so folgt hieraus, daß

$$AO : CO = CO : BO;$$

welches beweist, daß die Tr. ACO und BCO, welche außerdem einen gemeinschaftlichen Winkel in O haben, ähnlich sind.

Folglich AC : BC = AO : CO, d. h. in einem bestimmten Verhältniß.

Dieser Porismen kömmt offenbar aus dem Lehrsatz er, welcher den XII. Satz dieses Buches ausmacht. Siehe Seite 147.

XXI. Satz.

Porismen.

Wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben sind, so kann man einen Punkt finden, so, daß jede durch diesen Punkt nach der gegebenen Linie gezogene gerade Linie eine mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten sei, welche innerhalb der Kreisperipherie u. der gegebenen geraden Linie enthalten sind.

Es seien gegeben die gerade L. AB (Fig. 21) und der Kreis HKF; es ist möglich, einen Punkt D anzugeben, so daß der Theil CD einer durch D gelegten beliebigen Linie FDC die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten CE und CF sei.

Analysis.

Aus D fället den Perpendikel IDG auf AB und ziehet CI, HK.

Weil CE : CD = CD : CF,

so ist $CD^2 = CE \cdot CF = CK \cdot CI$;
da GI durch den P. D geht, so muß
$GH : GD = GD : GI$
d. h. $GD^2 = GH \cdot GI$ seyn.
Aber $CD^2 = CG^2 + DG^2$,
mithin $CK \cdot CI = CG^2 + GH \cdot GI$;
subtrah. diese Gleich. von dieser
$CI^2 = CG^2 + GI^2$,
so wird bleiben $CI \cdot KI = GI \cdot HI$;
woraus $CI : GI = HI : KI$,
und folglich sind die Tr. CIG und HIK, die außerdem einen W. I gemein haben, ähnl. Also ist der W. HKI, da er gleich CGI ist, ein Rechter, und folglich ist HI ein Durchm.; mithin ist GI der Lage nach bestimmt, und da die P. G, H, K gegeben sind, so ist das Rect. GH. GI oder das Qdr. von GD bestimmt; eben so ist es mit dem Punkt D.

Synthesis.

Aus dem Mittelp. O fället den Perpd. GOD und nehmet eine mittlere Propt. GD zwischen GH und GI, so ist D der gesuchte Punkt.

Denn $CE \cdot CF = CO^2 - HO^2 = CG^2 + GO^2 - HO^2 = CG^2 + GH \cdot GI$;
aber $GD^2 = GH \cdot GI$,
mithin $CE \cdot CF = CG^2 + GD^2 = CD^2$.

Dieses Porisme kann angesehen werden, als sei es aus der folgenden Aufg. abgeleitet:

Durch einen auf dem Durchmesser eines Kreises gegebenen Punkt P nach dem Perpendikel AB eine gerade Linie CLPM zu ziehen, so daß das Rectangel aus den Abschnitten CL und CM gleich dem Quadrat von GN sei.

$$CL \cdot CM = CK \cdot CI = CI^2 - CI \cdot KI;$$
$$\text{aber } CI^2 = CG^2 + GI^2$$
$$\text{und } CI \cdot KI = GI \cdot HI;$$
$$\text{also } CL \cdot CM = CG^2 + GI \cdot GH,$$
$$\text{und macht man } GD^2 = GI \cdot GH,$$
$$\text{so ist klar, daß } CL \cdot CM = CG^2 + GD^2 = CD^2,$$
$$\text{und folglich } CD^2 = GN^2 \text{ und } CD^2 = GN.$$

Da CD und der Punkt D bestimmt sind, so ist es der Punkt C so wie auch die gr. L. CLPM.

Die Aufg. ist alsdann aufgelöst, wenn man eine mittlere Propt. GD zwischen GH u. GI sucht und aus D als Mittelp. mit einem Halbm. = GN einen Kr. beschr., welcher den Perpd. AB in C trift. Man sieht hieraus, daß die Lage des P. C keinesweges von der des P. P abhängt. Wenn also PLM mit CEF zusammenfällt, so wird man

$$CE \cdot CF = GN^2 = CD^2$$

haben, und diese Eigenschaft wird Statt finden, welches auch immer die Lage des P. C auf AB sei.

XXII. Satz.

Porismen.

Wenn ein Punkt auf dem Durchmesser eines Kreises gegeben ist, so kann man in der Verlängerung dieses Durchmessers einen andern Punkt finden, so daß der Winkel, der durch zwei gerade Linien gebildet wird, die aus diesem Punkt nach den Endpunkten einer beliebigen Sehne, welche durch den gegebenen Punkt gehet, gezogen werden, durch den Durchmesser halbirt sei.

Auf dem Durchmesser FH (Fig. 22) eines Kreises sei ein Punkt A fixirt, durch welchen man eine beliebige Sehne BAC zieht; man kann in der Richtung dieses Durchmessers einen Punkt D finden, so daß der Winkel ADC gleich ADB sei.

Analysis.

Ziehet EB, EO und BO. Die Triangel EOD und BOD sind congr.; weil sie die Seite EO gl. BO, DO gemein, W. ODE gleich ODB haben und beide von gl. Gattung sind, da die W. DEO DBO einander gl. sind. Also ist der W. EOG gl. BOG. Es folgt hieraus, daß die Tr. EOG und BOG gleichfalls congr. sind, welches zeigt, daß EB prpd. auf dem Durchm. FH ist. Folgl. *)

*) Ziehet CF, CH und IHK prll. zu CF, oder perpd.

FA : AH = FD : DH;

ı das Verhältniß von FA zu AH gegeben iſt, ſo iſt es ıs von FD zu DA ebenfalls; woraus erhellet, daß der). D beſtimmt iſt.

Syntheſis.

Wenn Ihr einen P. D ſo nehmet, daß

OA : OH = OH : OD,

wird dieſes der geſuchte P. ſein.

Um es zu beweiſen, ziehet OC und OB. Weil

OH = OC, ſo iſt

OA : OC = OC : OD.

)a nun die Tr. AOC und COD eine gleichen Winkel ɔiſchen proport. Seiten haben, ſo ſind ſie ähnlich und lgl. iſt der W. OCA gleich ODC. Eben ſo wird man ligen, daß der W. OBA gl. ODC iſt. Da aber der Tr. OC gleichſchenklich iſt, ſo ſind die W. OCA und OBA nander gleich; eben ſo iſt es mit den Winkel ODC ıd ODB.

Dieſes Porismen entſtehet auch noch aus dem XII.)atze, Seite 147, in dem beſondern Falle, in welchem e beiden Punkte mit zwei P. des beſtimmten Kreiſes ırch das gegebene Verhältniß zuſammenfielen. Denn

---

)f CH. Da die W. ECF und FCB gleich ſind, ſo ſind e W. CIK und CKI auch gleich, und man hat HK = HI.)ie ähnl. Tr. CAF, HAK geben

CF : HK oder HI = AF : AH.

legen der Prllen. CF, KI

CF : HI = DF : DH;

folglich AF : AH = DF : DH.

wenn AC, DC und AB, DB in einerlei Verhältniß ſind, ſo iſt klar, daß

$$AC : AB = DC : DB,$$

und folglich iſt der W. BDB durch DB halbirt.

XXIII. Satz.

Porismen.

Wenn ein Punkt in dem Umfange eines Kreiſes gegeben iſt, ſo kann man einen andern Punkt finden, ſo daß zwei durch dieſen Punkt und durch den erſten nach der entgegengeſetzten Seite der Peripherie gezogenen geraden Linien, auf einer gegebenen Sehne Segmente abſchneiden, deren Rectangel unter ſich in einem bekannten Verhältniſſe ſeien.

Nehmet an, daß der Kreis ADBE (Fig. 23), der Punkt A und die Sehne DB gegeben ſeien; es exiſtirt ein anderer Punkt C, ſo daß die durch dieſen Punkt nach einem beliebigen Punkt B in der Peripherie gezogenen geraden Linien AB und CB auf DE Segmente beſtimmen, deren Rectangel DG . FE und DF . GE unter ſich in dem gegebenen Verhältniß KM zu LM ſind.

Aus-

Analysis.

Ziehet die L. CA und verlängert sie, bis sie ED in H begegnet.

Weil LM : LM = DG . FE : DF . GE,

so folgt, daß

KL : LM = DG . FE — DF . GE : DF . GE;

aber DG . FE — DF . GE =

(DF + FG) (GE + FG) — DF . GE = FG . DE;

also KL : LM = FG . DE : DF . GE.

Nehmet auf DE einen P. H, so daß man habe

KL : LM = DE : DH

alsdann ist KL : LM = FG . DE : FG . DH,

und folglich FG . DH = DF . GE.

Wenn man auf beiden Seiten das Rect. DF . FG hinzusetzt, so leitet man daraus ab, daß

FH . FG = DF . FE = AF . FB;

mithin FH : FB = AF : FG.

Woraus folgt, daß die Tr. AFH und GFB ähnl. sind und daß der W. AHF gleich ist FBG; aber der Winkel AHF ist gegeben, weil die P. A, H und D bestimmt sind, daher ist auch die gr. L. AC bestimmt, weil sie die Sehne eines Kreisabschnittes sein muß, der einen bestimmten W. FBG oder ABC enthält; die Lage des P. C ist also fixirt.

Synthesis.

Verlängert die Sehne ED bis H um eine Grß, so daß

DE : DH = KL : LM;

ziehet HA, und in einem bel. P. B der Peripherie mache den W. ABC gleich AHF, so ist C der gesuchte P.

Denn da die Tr. AFH und GFB offenbar ähnlich sind, so ist

$$FH : FB = AF : FG,$$

daraus $FH \cdot FG = FB \cdot AF = DF \cdot FE$; folglich $FH \cdot FG - DF \cdot FG = DF \cdot FE - DF \cdot FG$, oder auch

$$FG \cdot DH = DF \cdot GE.$$

Aber, übrigens

$$KL : LM = DE : DH = FG \cdot DE : FG \cdot DH,$$

also $KL : LM = FG \cdot DE : DF \cdot GE$; folglich

$$KM : LM = FG \cdot DE + DF \cdot GE : DF \cdot GE,$$

oder, wenn $FG = DG - DF$,

$$DE = DG + GE;$$

$$KM : LM = DG \cdot FE : DF \cdot GE.$$

Das eben erwiesene Porismen kömmt natürlich von dieser Aufgabe her:

Durch zwei gegebene P. A und C, davon einer in der Peripherie eines gegebenen Kreises, zu dieser Peripherie zwei gerade Linien AB und CB zu ziehen, welche auf der Sehne DE Segmente zwischen sich fassen, deren Rect. $DG \cdot FE$ und $DF \cdot GE$ unter sich in einem gegeben Verhältniß seien. Nimmt man den Punkt H wie vorher, so wird die Analysis der Aufgabe zeigen, daß der Winkel ABC gleich AHF sein muß. Wenn man daher über AC ein dieses Winkels

fähiges Kreisſegment beſchr., ſo wird die Berührung oder der Durchſchnitt dieſes Segmentes mit dem gegebenen Kreiſe die Lage des Punktes B beſtimmen. Es iſt aber klar, daß, wenn der P. C auch in der Peripherie liegt, die beiden Kreiſe zuſammenfallen werden, und die Aufg. würde einer unendlichen Anzahl von Aufl. fähig würden.

XXIV. Satz.

Porismen.

Wenn man durch zwei gegebene Punkte zu einer von zwei gegebenen Linien zwei gerade Linien zieht, welche die andere Linie in zwei P. ſchneiden, ſo kann man auf dieſer zweiten Linie zwei fixirte Punkte finden, ſo daß das Rectangel aus ihren Entfernungen vom Durchſchnittspunkte gleich ſei einem angeblichen Rectangel, das daſſelbe bleibt, welches auch immer die Richtung der zwei geraden Secanten ſein mag.

Angenomen, man zieht durch die gegebenen Punkte D und E (Fig. 24) zwei gerade Linien DF und EF nach einem Punkt F in der gegebenen Linie AC; ſie werden auf der zweiten gege-

denen geraden Linie AB zwei Punkte H und G bestimmen, und welches auch diese Punkte sein mögen, so sind in AB zwei andere fixirte Punkte I und K vorhanden, so daß das Rect. IH . GK beständig gleich einem gegebenen Rectangel ist.

Analysis.

Ziehet EI, EA, DA, DK und verlängert DE bis zum Treffpunkt P mit AC. Weil die P. A, F, P der gr. L. AC angehören, so gehet aus der Hypot. hervor, daß die Rect. IA . AK, IH . GK, IN . NK unter sich gleich sind, also

$$IH : IA = AK : GK,$$

woraus $AH : IA = AG : GK$

oder auch $AH : AG = IA : GK.$

Durch E ziehet LEM perl. zu AB und der verl. gr. L. AC und FD begegnend. Alsdann ist es klar, daß

$$LE : LM = AH : AG = IA : GK.$$

Ferner, weil $IA . AK = IN . NK,$

so ist $IN : IA = AK : NK;$

woraus man ableitet, daß

$$AN : IA = AN : NK$$

und folglich $IA = NK.$

Diesem Resultate gemäß ist

$$LE : LM = NK : GK,$$

und $LE : EM = NK : GN$

oder auch $LE : NK = EM : GN$

d. h. $= ED : DN;$ also sind die Tr. LDE und KND

ähnlich; woraus folgt, daß LDK eine gerade Linie ist. Ziehet DO. Weil IA = NK, so ist LE : IA = LE : NK oder = EO : OI = ED : DN, und folglich ist DO prll. zu AB. Da die Prllen. OD und LM der Lage nach gegeben sind, so gehet aus dem Vorhergehenden hervor, daß die P. O und L und folglich die P. I und K bestimmt sind; woraus man sieht, daß es sich eben so mit dem Rect. IA . AK verhält.

Synthesis.

Ziehet DO, EL prll. zu AB u. zugleich in O und L der Verläng. von AO begegnend; ziehet EO, LD u. verl. sie bis zu AB in I u. K; diese letztere P. sind die gesuchten P. Denn, wenn man DF und EF zieht, so ist es klar, daß LE : IA = OE : OI

= ED : DN = DM : DG = LM : GK,

woraus LE : LM = IA : GK, aber andererseits

LE : LM = AH : AG;

also IA : IH = GK : AK, und folgl.

IA . AK = IH . GK.

Dieses Porismen entsteht aus folgender Aufg.:

Wenn zwei gerade Linien AB und BC der Lage nach gegeben sind, so wie die P. I, K, E u. D, einen P. zu finden, so daß die durch diesen P. zu den gegebenen P. D und E gezogenen geraden Linien EF, DF auf AB, von den gegebenen P. I und K an gerechnet, zwei Segmente

einschließen, deren Rect. gleich einem beständigen Raume sei.

Es ist klar, daß, wenn die P. I und K die vorhin angegebene Lage haben, die Aufg. unbestimmt ist.

XXV. Satz.

Porismen.

Wenn drei nicht parallele der Lage nach gegebene Linien gegeben sind, so kann man eine vierte finden, so daß, wenn man quer durch die vier geraden L. Parallelen zu einer fünften gegebenen geraden Linie zieht, diese Parallelen die ersten vier geraden Linien in proportionale Theile theilen, deren Verhältnisse beständig sind.

Es seien (Fig. 25) AB, CD und AE die drei ersten gegebenen geraden Linien; so kann man eine vierte FG finden, so daß jede Parallele zu einer andern gegebenen geraden L. HIKL, welche die vier geraden L. AC, CD, AE, FG quer durchschneidet, durch sie in Segm. getheilt sei prop. den gr. L. HI, IK, KL, deren Verh. bekannt sind.

Analysis.

Verläng. AE und FG bis zu ihrem Durchschnitte

punkt in M; durch K und I ziehet NO und PO respect. prll. zu AB und FG, und durch den Durchschnittsp. O ziehet CO.

Es sei H′I′K′L′ eine andere, wie die erste getheilte Transversale; ziehet eben so P′O′I′ prll. zu PIO und begegnend CO in O′; endlich ziehet O′K′ und verläng. diese gr. L. bis in N.

Weil KO prll. zu PH, so ist

$$IH : IK = PI : IO;$$

und ferner, da die Prllen. PO und P′O′ durch CP, CI und CO geschnitten sind, so folgt hieraus, daß

$$PI : IO = P'I' : IO';$$

mithin $H'I'' : I'K' = P'I' : I'O'$,

woraus folgt, daß O′N′ prll. zu ON ist. Jetzt ist

$$IK : KL = OK : KN$$

und $I'K' = K'L' = O'K' : K'N'$;

mithin $OK : KN = O'K' : K'N'$;

welches beweist, daß AE, OC und FG in einerlei P. M zusammen laufen.

Ferner CA : AF = OK : KN = IK : KL; und da das Verh. von CA zu AF gegeben ist, so ist klar, daß AF und der P. F bestimmt sind, aber der P. L ist gegeben, folglich ist FLG der Lage nach bestimmt.

Synthesis.

Nehmet den Punkt F so daß CA zu AF in dem Verh. von IK zu KL sei, u. ziehet LF; dieses wird die gesuchte L. sein. Um es zu beweisen, ziehet NK und PI parallel zu AB und FG und durch ihren Durch-

schnittsp. O die L. CO; nehmet auf dieser gr. L. einen andern beliebigen P. O′, ziehet O′K′N′ und O′I′P′, welche AE und CD in K′ und I′ begegnen; die gerade Transversale HI′K′L′ ist eben so getheilt als HIKL.

Denn, weil NO, N′O′ prll. zu AB und OP, O′P′ es zu FG sind, so folgt daraus

HI : IK = PI : IO = P′I′ : I′O′ = HI′ : I′K′,

Ferner, da

CA : AF = IK : KL = KO : KN,

so sieht man, daß OC, EA, GF in einerlei P. M zusammenlaufen, woraus hervorgeht, daß

IK : KL = OK : NK = O′K′ : K′N′ = I′K′ : K′L′.

Das vorherg. Porismen entstehet aus dem unbestimmten Fall dieser berühmten Aufg.

Wenn vier gerade Linien AB, CD, AE, FG (Fig. 25 bis) der Lage nach gegeben sind, eine gerade Transversale HIKL zu ziehen, welche durch diese Linien in Segmente, proportional den gegebenen geraden Linien X, Y, Z, geschnitten sei.

Nehmet an, die Aufg. sei aufgelöst, verl. GF und EA bis zu ihrem Zusammentreffen in M, ziehet die Parallelen NKO und PIQ und ziehet MTO. Weil

TA : AF = OK : KN = IK : KL,

so ist das Verh. von TA zu AF gegeben und folglich sind der P. T und die gr. L. MQ der Lage nach bestimmt. Ferner

PI : IQ = HI : IK,

o ist das Verhältniß von PI zu IO auch gegeben; er da der Tr. CPI augenscheinlich der Gattung nach geben, so ist das Verhältniß CP zu PI bestimmt; also das Verhältniß von CP zu PO bekannt und der :. CPO ist der Gattung nach bestimmt. Da nun O und CO beide der Lage nach bekannt sind, so ist r Durchschnittspunkt O bestimmt, folglich sind die arallelen NO und PO der Lage nach bestimmt; wor- is folgt, daß ihre Durchschnittspunkte K und L, so ie die gerade Transversale HIKL ebenfalls bekannt ıd.

Die Construktion der Aufgabe leitet sich leicht aus r vorhergehenden Analysis ab: Wenn Ihr zu diesem weck EA und GF bis zu ihrem Durchschnittspunkt M erl. habt, so machet

$$FA : AT = Z : Y$$

nd ziehet MTO. Nehmet nachgehends einen beliebi- en Punkt Q in CB; ziehet QS parallel zu FG und achet

$$QR : RS = X : Y;$$

ernach ziehet CS und verl. sie, bis sie MO in O ifft; ziehet endlich OI und KO respective parallel zu G und AB; die gerade Linie HIKL, welche durch die Durchschnittsp. I und K gehet, ist die verlangte gr. L.

Denn $HI : IK = PI : IO = QR : RS = X : Y$

und $IK : KL = OK : KN = TA : AF = Y : Z.$

Jetzt, wenn das Verh. CA zu AF gleich dem Ver- ältniß von Y und Z würde, so würde der P. T mit C nd TO mit CO zusammenfallen. Die Aufg. wäre in die-

sem Falle unbestimmt, d. h., daß jeder in CO genommene P. die Eigenschaft haben würde, die vorher ausschließlich dem P. O angehörte *).

*) Diese Aufg. wurde zuerst durch Newton aufgegeben, um den Lauf eines Kometen vermittelst vier in kleinen Intervallen von einander gemachter Beobachtungen zu bestimmen. Aber, unglücklicherweise führt die Aufl. in der Praxis zu ungewissen und selbst unrichtigen Resultaten. Dieser unvorhergesehene Fehler veranlaßte Boscowich, mit Sorgfalt alle Umstände zu untersuchen, welche die Aufg. darbieten könnte, und er entdeckte, daß die Aufg. gerade in dem Falle, wo sie zu astronomischen Beobachtungen angewandt werden kann, unbestimmt wird.

Isoperimetrische Figuren.

Erklärungen.

Man nennt isoperimetrische Figuren, die einen gleichen Umfang haben oder von einerlei Linearischer Ausdehnung sind.

XXVI. Satz.

Aufgabe.

Auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden, so daß die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei.

Es werde verlangt, durch einen P. der gr. L. CD (Fig. 26) zu den gegebenen Punkten A und B zwei gerade Linien AG und BG zu ziehen, deren Summe ein Minimum sei.

Analyſis.

Durch B, einen der gegebenen Punkte, fället ein Perpd. BE auf CD, und nachdem Ihr ſie um eine gl. Grß. unterhalb CD verlängert habt, ziehet GF. Es iſt einleuchtend, daß die rechtw. Tr. BEG und FEG congr. ſind; und folgl. BG = GF; alſo iſt AG + GF ein Minimum. Es gehet hieraus hervor, daß die L. AGF gerade iſt, und ſie iſt beſtimmt, weil die P. A und F gegeben ſind; mithin ſind ihr Durchſchn. G mit CD, und die gr. L. AG, BG gleichfalls beſtimmt.

Es iſt einleuchtend, daß die W. AGC und BGD gleich ſind.

Zuſ. Auf analoge Art löſt man eine der vorhergehenden ähnl. Aufg. auf:

Auf einer der Lage nach gegeb. geraden Linie einen Punkt zu finden, ſo daß die Differenz ihrer Entfernung von zwei gegebenen Punkten die größtmögliche ſei.

Wenn dieſe P. beide auf einerlei Seite der gr. L. CD liegen, Fig. 26 bis, ſo iſt es klar, daß, da der Unterſchied zwiſchen A′G und BG immer geringer als A′B iſt, ſo findet die äußerſte Grenze Statt, und dieſe Diff. hat ihr Maximum erreicht, wenn A′G und BG mit A′B zuſammenfallen, in welchem Falle der P. G ſich findet, wenn man A′B bis zur Begegnung mit CD verlängert.

Wenn aber die P. A und B auf verſchiedenen Seiten der L. CD liegen, wie in der Fig. 26 bis, ſo fällt

den Perpd. BE, den Ihr nach EF um eine gl. Grß. verlängert, und ziehet die gr. L. AFG und FG.

Die Tr. BEG und FEG sind offenbar congr. und folgl. BG = GF; aber da in dem Tr. AFG' der Unterschied zwischen AG' und G'F geringer als AF ist, so erreicht sie ihr Maximum, wenn angenommen wird, dieser Tr. sei mit der gr. L. AF zusammengefallen. In diesem Falle ist W. AGE = BGC.

XXVII. Satz.

Lehrsatz.

Zwei durch zwei gegebene Punkte nach einerlei Punkte im Umfange eines Kreises gezogene gerade Linien bilden die kleinstmögliche Summe, wenn sie gegen die durch ihren Treffpunkt gezogene Tangente gleich geneigt sind.

Von allen durch A und B (Fig. 27) nach dem Umfange eines Kreises GDH gezogenen geraden Linien, welche mit der Tangente EF gleiche Winkel machen, ist die Summe der geraden Linien AD und BD die kleinstmögliche.

Analysis.

Durch den letzten Satz ist die Summe von AD und BD, welche auf der geraden L. unter gl. W. geneigt sind, kleiner als die Summe der andern L., welche man

von A und B zu jedem andern P. in EF ziehen kann; aber die zur Tang. gezogenen L. sind geringer als die äußeren Linien, welche an die Peripherie stoßen. Also aus diesen beiden Gründen, bilden AD und BD das Minimum von allen aus den gegebenen P. A und B bis zur Periph. GDH gezogenen gr. L.

XXVIII. Satz.

Aufgabe.

Einen Punkt zu finden, so daß die Summe seiner Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei.

Es sei vorgegeben, durch die drei Punkte A, B, C (Fig. 28) die drei geraden Linien AB, BD, CD zu ziehen, so daß ihre Summe ein Minimum sei.

Analysis.

Denkt man sich, daß BD beständig bliebe, so muß die Lage von D auf der Periph. des aus dem Mittelp. B mit dem Halbm. BD beschr. Kreises nach dem letzten Satze so beschaffen sein, daß, wenn die Summe AD + CD ein Minimum ist, der W. ADB gleich CDB sei. Aus demselben Grunde, wenn AD unveränderlich bleibe, so müssen BD und CD, die ein Minimum bilden, mit AD gleiche W. ADB und ADC machen. Wenn man diese Bedingungen vereinigt, so

ht man, daß AD, BD, CD in ihrem Treffpunkt un- r sich gleiche W. bilden.

Hieraus diese Constr. Zeichnet den Tr. ABC und schr. über jeder der Seiten AC u. BC einen gleichseit. r., um welche Ihr Kr. beschr., die sich im P. D be- gnen. Dieser P. ist der gesuchte.

Denn die W. ADC u. CDB sind, da sie die Sup- emente zu den W. der gleichseitigen Tr. sind, jeder eich $\frac{2}{3}$ von 2 Rechten oder $\frac{1}{3}$ von 4 Rechten. Folglich id die drei um den P. D gebildeten W. einander gl.

XXIX. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden L. einen Punkt z finden, so daß die aus diesem Punkte nach wei gegebenen Punkten gezogenen Linien den größtmöglichen Winkel einschließen.

Es werde verlangt AC und BC (Fig. 29) z ziehen, so daß der Winkel ACB ein Maxi- mum sei.

Analysis.

Leget durch die drei P. C, A und B einen Kreis. Weil der W. ACB größer als jeder andere W. ist, dessen Scheitel auf DE ist, so muß diese gerade L. alle ihre Punkte außerhalb das Kreises haben, den Punkt C

ausgenommen. DE berührt also den Kreis in C. Es folgt hieraus, daß

$$GA \cdot GB = CG^2,$$

und folgl ist der P. C bestimmt.

XXX. Satz.

Aufgabe.

Unter allen isoperimetrischen Triangeln, die über einerlei Grundlinie stehen, denjenigen zu bestimmen, dessen Flächeninhalt der größte ist.

Es werde verlangt, einen Triangel zu finden, der auf der Grundlinie AC stehet (Fig. 30) und in einem gegebenen Perimeter die größtmögliche Fläche enthält.

Analysis.

Weil die Grundl. des Tr. ABC constant ist, während sein Inhalt ein Maximum ist, so muß seine Höhe die größtmögliche sein, und folglich befindet sich der Scheitel B auf einer möglichst entfernten Prlle. zu AC. Es sei E diese Prlle; die Summe der Seiten AB und CB und folglich der ganze Umfang des Tr. ist nach dem XXVI. Satze dieses Buches, Seite 187, der kleinstmögliche, wenn der W. ABD gleich CBE ist. Es ist aber klar, daß AB + BC ein Minimum sein muß, weil

weil alle andere durch A und C nach einem beliebigen Punkt in DE eine Summe machen größer als der beständige Umfang AB + CB, weil die Abschnitte der andern isoperimetrischen Triangel unter DE sind; mithin W. ABD = CBE oder, welches einerlei, BAC = BCA woraus BC = BA. Also ist der Tr. ACB gleichschenklig, und er ist bestimmt, denn alle seine Seiten sind gegeben.

Zusatz. Es gehet hieraus hervor, daß ein gleichseitiges Polygon unter allen isoperimetrischen Polygonen von einerlei Seitenzahl dasjenige ist, welches die größte Fläche enthält. Denn ohne alles Uebrige von der Figur zu ändern, nehmet an, daß zwei beliebige anliegende Seiten sich verändern, so werden sie den größtmöglichen Triangel bilden, wenn sie von gleicher Länge sein werden. Das Polygon, welches nichts anders als die Sammlung der so gebildeten Triangel ist, muß also sein Maximum sein, wenn diese Triangel gleichschenklig in jeder Combination sind, und folglich, wenn alle Seiten der Figur gleich sind.

XXXI. Satz.

Lehrsatz.

Ein Polygon, von welchem alle Seiten gegeben sind, eine ausgenommen, schließt den größtmöglichen Flächeninhalt ein, wenn es in einem Halb-

schnittsp. O die L. CO; nehmet auf dieser gr. L. einen andern beliebigen P. O′, ziehet O′K′N′ und O′I′P′, welche AE und CD in K′ und I′ begegnen; die gerade Transversale HI′K′L′ ist eben so getheilt als HIKL.

Denn, weil NO, N′O′ prll. zu AB und OP, O′P′ es zu FG sind, so folgt daraus

HI : IK = PI : IO = PI′ : I′O′ = HI′ : I′K′,

Ferner, da

CA : AF = IK : KL = KO : KN,

so sieht man, daß OC, EA, GF in einerlei P. M zusammenlaufen, woraus hervorgeht, daß

IK : KL = OK : NK = O′K′ : K′N′ = I′K′ : K′L′.

Das vorherg. Porismen entstehet aus dem unbestimmten Fall dieser berühmten Aufg.

Wenn vier gerade Linien AB, CD, AE, FG (Fig. 25 bis) der Lage nach gegeben sind, eine gerade Transversale HIKL zu ziehen, welche durch diese Linien in Segmente, proportional den gegebenen geraden Linien X, Y, Z, geschnitten sei.

Nehmet an, die Aufg. sei aufgelöst, vers. GF und EA bis zu ihrem Zusammentreffen in M, ziehet die Parallelen NKO und PIO und ziehet MTO. Weil

TA : AF = OK : KN = IK : KL,

so ist das Verh. von TA zu AF gegeben und folglich sind der P. T und die gr. L. MO der Lage nach bestimmt. Ferner

PI : IO = HI : IK,

also ist das Verhältniß von PI zu IO auch gegeben; aber da der Tr. CPI augenscheinlich der Gattung nach gegeben, so ist das Verhältniß CP zu PI bestimmt; also ist das Verhältniß von CP zu PO bekannt und der Tr. CPO ist der Gattung nach bestimmt. Da nun MO und CO beide der Lage nach bekannt sind, so ist ihr Durchschnittspunkt O bestimmt, folglich sind die Parallelen NO und PO der Lage nach bestimmt; woraus folgt, daß ihre Durchschnittspunkte K und I, so wie die gerade Transversale HIKL ebenfalls bekannt sind.

Die Construktion der Aufgabe leitet sich leicht aus der vorhergehenden Analysis ab: Wenn Ihr zu diesem Zweck EA und GF bis zu ihrem Durchschnittspunkt M verl. habt, so machet

$$FA : AT = Z : Y$$

und ziehet MTO. Nehmet nachgehends einen beliebigen Punkt Q in CB; ziehet QS parallel zu FG und machet

$$QR : RS = X : Y;$$

hernach ziehet CS und verl. sie, bis sie MO in O trifft; ziehet endlich OI und KO respective parallel zu FG und AB; die gerade Linie HIKL, welche durch die Durchschnittsp. I und K gehet, ist die verlangte gr. L.

Denn $HI : IK = PI : IO = QR : RS = X : Y$

und $IK : KL = OK : KN = TA : AF = Y : Z.$

Jetzt, wenn das Verh. CA zu AF gleich dem Verhältniß von Y und Z würde, so würde der P. T mit C und TO mit CO zusammenfallen. Die Aufg. wäre in die-

sem Falle unbestimmt, d. h., daß jeder in CO genommene P. die Eigenschaft haben würde, die vorher ausschließlich dem P. O angehörte *).

*) Diese Aufg. wurde zuerst durch Newton aufgegeben, um den Lauf eines Kometen vermittelst vier in kleinen Intervallen von einander gemachter Beobachtungen zu bestimmen. Aber, unglücklicherweise führt die Aufl. in der Praxis zu ungewissen und selbst unrichtigen Resultaten. Dieser unvorhergesehene Fehler veranlaßte Boscowich, mit Sorgfalt alle Umstände zu untersuchen, welche die Aufg. darbieten könnte, und er entdeckte, daß die Aufg. gerade in dem Falle, wo sie zu astronomischen Beobachtungen angewandt werden kann, unbestimmt wird.

Isoperimetrische Figuren.

Erklärungen.

Man nennt isoperimetrische Figuren, die einen gleichen Umfang haben oder von einerlei Linearischer Ausdehnung sind.

XXVI. Satz.

Aufgabe.

Auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden, so daß die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei.

Es werde verlangt, durch einen P. der gr. L. CD (Fig. 26) zu den gegebenen Punkten A und B zwei gerade Linien AG und BG zu ziehen, deren Summe ein Minimum sei.

Analysis.

Durch B, einen der gegebenen Punkte, fället ein Perpd. BE auf CD, und nachdem Ihr sie um eine gl. Grß. unterhalb CD verlängert habt, ziehet GF. Es ist einleuchtend, daß die rechtw. Tr. BEG und FEG congr. sind; und folgl. BG = GF; also ist AG + GF ein Minimum. Es gehet hieraus hervor, daß die L. AGF gerade ist, und sie ist bestimmt, weil die P. A und F gegeben sind; mithin sind ihr Durchschn. G mit CD, und die gr. L. AG, BG gleichfalls bestimmt.

Es ist einleuchtend, daß die W. AGC und BGD gleich sind.

Zus. Auf analoge Art löst man eine der vorhergehenden ähnl. Aufg. auf:

Auf einer der Lage nach gegeb. geraden Linie einen Punkt zu finden, so daß die Differenz ihrer Entfernung von zwei gegebenen Punkten die größtmögliche sei.

Wenn diese P. beide auf einerlei Seite der gr. L. CD liegen, Fig. 26 bis, so ist es klar, daß, da der Unterschied zwischen A′G und BG immer geringer als A′B ist, so findet die äußerste Grenze Statt, und diese Diff. hat ihr Maximum erreicht, wenn A′G und BG mit A′B zusammenfallen, in welchem Falle der P. G sich findet, wenn man A′B bis zur Begegnung mit CD verlängert.

Wenn aber die P. A und B auf verschiedenen Seiten der L. CD liegen, wie in der Fig. 26 bis, so fället

den Perpd. BE, den Ihr nach EF um eine gl. Grß verlängert, und ziehet die gr. L. AFG und FG.

Die Tr. BEG und FEG sind offenbar congr. und folgl. BG = GF; aber da in dem Tr. AFG' der Unterschied zwischen AG' und G'F geringer als AF ist, so erreicht sie ihr Maximum, wenn angenommen wird, dieser Tr. sei mit der gr. L. AF zusammengefallen. In diesem Falle ist W. AGE = BGC.

XXVII. Satz.

Lehrsatz.

Zwei durch zwei gegebene Punkte nach einerlei Punkte im Umfange eines Kreises gezogene gerade Linien bilden die kleinstmögliche Summe, wenn sie gegen die durch ihren Treffpunkt gezogene Tangente gleich geneigt sind.

Von allen durch A und B (Fig. 27) nach dem Umfange eines Kreises GDH gezogenen geraden Linien, welche mit der Tangente EF gleiche Winkel machen, ist die Summe der geraden Linien AD und BD die kleinstmögliche.

Analysis.

Durch den letzten Satz ist die Summe von AD und BD, welche auf der geraden L. unter gl. W. geneigt sind, kleiner als die Summe der andern L., welche man

von A und B zu jedem andern P. in EF ziehen kann; aber die zur Tang. gezogenen L. sind geringer als die äußeren Linien, welche an die Peripherie stoßen. Also aus diesen beiden Gründen, bilden AD und BD das Minimum von allen aus den gegebenen P. A und B bis zur Periph. GDH gezogenen gr. L.

XXVIII. Satz.

Aufgabe.

Einen Punkt zu finden, so daß die Summe seiner Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei.

Es sei vorgegeben, durch die drei Punkte A, B, C (Fig. 28) die drei geraden Linien AE, BD, CD zu ziehen, so daß ihre Summe ein Minimum sei.

Analysis.

Denkt man sich, daß BD beständig bliebe, so muß die Lage von D auf der Periph. des aus dem Mittelp. B mit dem Halbm. BD beschr. Kreises nach dem letzten Satze so beschaffen sein, daß, wenn die Summe AD + CD ein Minimum ist, der W. ADB gleich CDB sei. Aus demselben Grunde, wenn AD unveränderlich bleibt, so müssen BD und CD, die ein Minimum bilden, mit AD gleiche W. ADB und ADC machen. Wenn man diese Bedingungen vereinigt, so

sieht man, daß AD, BD, CD in ihrem Treffpunkt unter sich gleiche W. bilden.

Hieraus diese Constr. Zeichnet den Tr. ABC und beschr. über jeder der Seiten AC u. BC einen gleichseit. Tr., um welche Ihr Kr. beschr., die sich im P. D begegnen. Dieser P. ist der gesuchte.

Denn die W. ADC u. CDB sind, da sie die Supplemente zu den W. der gleichseitigen Tr. sind, jeder gleich $\frac{1}{3}$ von 2 Rechten oder $\frac{1}{3}$ von 4 Rechten. Folglich sind die drei um den P. D gebildeten W. einander gl.

XXIX. Satz.

Aufgabe.

Auf einer gegebenen geraden L. einen Punkt zu finden, so daß die aus diesem Punkte nach zwei gegebenen Punkten gezogenen Linien den größtmöglichen Winkel einschließen.

Es werde verlangt AC und BC (Fig. 29) zu ziehen, so daß der Winkel ACB ein Minimum sei.

Analysis.

Leget durch die drei P. C, A und B einen Kreis. Weil der W. ACB größer als jeder andere W. ist, dessen Scheitel auf DE ist, so muß diese gerade L. alle ihre Punkte außerhalb des Kreises haben, den Punkt C

ausgenommen. DE berührt also den Kreis in C. Es folgt hieraus, daß

$$GA \cdot GB = CG^2,$$

und folgl ist der P. C bestimmt.

XXX. Satz.

Aufgabe.

Unter allen isoperimetrischen Triangeln, die über einerlei Grundlinie stehen, denjenigen zu bestimmen, dessen Flächeninhalt der größte ist.

Es werde verlangt, einen Triangel zu finden, der auf der Grundlinie AC stehet (Fig. 30) und in einem gegebenen Perimeter die größtmögliche Fläche enthält.

Analysis.

Weil die Grundl. des Tr. ABC constant ist, während sein Inhalt ein Maximum ist, so muß seine Höhe die größtmögliche sein, und folglich befindet sich der Scheitel B auf einer möglichst entfernten Prlle. zu AC. Es sei E diese Prlle; die Summe der Seiten AB und CB und folglich der ganze Umfang des Tr. ist nach dem XXVI. Satze dieses Buches, Seite 187, der kleinstmögliche, wenn der W. ABD gleich CBE ist. Es ist aber klar, daß AB + BC ein Minimum sein muß, weil

weil alle andere durch A und C nach einem beliebigen Punkt in DE eine Summe machen größer als der beständige Umfang AB + CB, weil die Abschnitte der andern isoperimetrischen Triangel unter DE sind; mithin W. ABD = CBE oder, welches einerlei, BAC = BCA woraus BC = BA. Also ist der Tr. ACB gleichschenklig, und er ist bestimmt, denn alle seine Seiten sind gegeben.

Zusatz. Es gehet hieraus hervor, daß ein gleichseitiges Polygon unter allen isoperimetrischen Polygonen von einerlei Seitenzahl dasjenige ist, welches die größte Fläche enthält. Denn ohne alles Uebrige von der Figur zu ändern, nehmet an, daß zwei beliebige anliegende Seiten sich verändern, so werden sie den größtmöglichen Triangel bilden, wenn sie von gleicher Länge sein werden. Das Polygon, welches nichts anders als die Sammlung der so gebildeten Triangel ist, muß also sein Maximum sein, wenn diese Triangel gleichschenklig in jeder Combination sind, und folglich, wenn alle Seiten der Figur gleich sind.

XXXI. Satz.

Lehrsatz.

Ein Polygon, von welchem alle Seiten gegeben sind, eine ausgenommen, schließt den größtmöglichen Flächeninhalt ein, wenn es in einem Halb-

Kreis beschrieben ist, der die unbestimmte Seite als Durchmesser hat.

Es sei das Polygon ABCDEF (Fig. 31), dessen Seiten AB, BC, CD, DE und EF beständig sind und auf einer veränderlichen Grundlinie AF stehen, so wird der Inhalt des Polygons sein Maximum erreicht haben, wenn AF der Durchmesser eines um das Polygon beschriebenen Kreises ist.

Beweis. In der That, ziehet AD und FD nach irgend einem der Scheitel D, so werden die Räume ABCD und DEF augenscheinlich die nämlichen bleiben, während sich der W. ADF vergrößern wird und die P. A und F sich von einander entfernen werden. Es wird also das Polygon die größte Fläche einschließen, wenn der zwischen den Seiten AD und DF enthaltene Tr. ADF sein Maximum erreicht haben wird. Jetzt wird der Tr. in diesem Zustand sein, wenn der aus F auf AD gefällte Prpd. der größtmögl. sein wird. Alsdann ist es klar, daß ADF ein rechter W. sein muß, und folgl., daß der P. D in einer halben Kreisperiph. liegt, deren Durchm. AF ist. Wendet man diese Schlüsse auf alle Scheitel B, C, E an, so wird man sehen, daß alle in einem halben Kreisumfang liegen müssen, dessen Durchmesser AF.

Erster Zus. Es enthält also ein Polygon, dessen Seiten gegeben sind, die größte Fläche, wenn es in einem

Kreiſe eingeſchr. werden kann. Denn es ſei ABCD ein Polygon, deſſen Seiten alle gegeben ſind; ziehet den Durchm. AF und ziehet DF. Das ſo gebildete Polygon ABCDF iſt ein Maximum; aber der Tr. ADF iſt offenbar beſtimmt, mithin iſt das übrigbleibende Polygon ABCD auch ein Maximum.

Zweiter Zuſ. Es erhellet hieraus, daß von allen iſoperimetriſchen Polyg. von einer gegeb. Seitenzahl das reguläre Polyg. das größte iſt. Denn nach dem vorherg. Satze muß dieſes Polygons Maximum alle ſeine Seiten gl. haben, und ſeine W. ſind auch gleich, weil alle ihre Scheitel auf der dem Polyg. umſchr. Kreisperiph. liegen.

XXXII. Satz.

Lehrſatz.

Der Kreis iſt von allen iſoperimetriſchen Figuren die größte.

Beweis. Durch die vorherg. Sätze iſt es klar, daß, wenn der Umfang und die Seitenzahl gegeben iſt, das Maximum der Figur ein regul. Polyg. iſt. Es ſei ABCDEF (Fig. 32) ein ſolches Polyg., das den gegeb. Umfang hat. Halbiret die dem umſchr. Kreis correſp. Bog. und ſchreibet in dieſen Kr. ein regul. Polygon MBGC . . LA von doppelter Seitenzahl als das vorherg. ein. Ziehet den Durchm. MI und die gr. L. MD und OD. Die zwei Polyg. ſind jedes zuſammengeſetzt aus einerlei Anz. von Tr. gl. ODN für das eine u. gl. ODI für das andere; ihre Flächen ſind alſo unter ſich wie

ON zu NI oder, welches einerlei, wie PN zu MI. Wenn aber das große Polygon M . . . A ſich reducirt hätte zu einem ähnl. Polyg. von demſelben Umfange als A...F und deſſen zu DI gleichliegenden Seiten gl. DE wären, ſo wären die ähnl. Pol. in dem Verh. von DI^2 zu DN^2 d. h. wie MI zu MN. Folglich iſt das primitive Polyg. A . . . F zu einem andern Polyg. von einerlei Umfang und von einer doppelten Seitenzahl wie PN zu MN. Eine Fig. von einem beſtändig. Umfange hat alſo einen nach u. nach größern Flächeninh., je nachdem man die Zahl ſeiner Seiten verdoppelt. Wenn man dieſe Verdop. fortſetzt, ſo wird das hieraus entſtehende Polyg. eine immerwährend wachſende Fläche erreichen. Alſo muß der Kr., welcher die Grz. iſt, deren ſich alle dieſe Pol. nähern, ſo wie ihre Seitenzahl wächſt, bei einerlei Umfang, den größten Raum einſchließen.

Inhalt.

Geometrische Analysis.

Seite.

Erklärung des Begriffs Analysis 1

Erstes Buch, enthält 28 Sätze.

Jeder Satz enthält zwei Auflösungsweisen, Analysis und Synthesis.

1. Durch zwei gegebene Punkte zwei schiefe Linien nach einer geraden Linie zu ziehen, die gegen letztere gleich geneigt sind 4

2. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die mit zwei der Lage nach gegebenen geraden Linien gleiche Winkel macht 6

3. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß diejenigen Abschnitte, die zwischen den auf ihr aus zwei gegebenen Punkten gefällten Perpendikeln liegen, einander gleich seien . . . 6

4. Einen Triangel in zwei gleiche Theile durch eine gerade Linie zu theilen, die durch einen auf einer der Seiten gegebenen Punkt geht 7

Seite

5. Innerhalb eines Triangels einen Punkt zu finden, durch welchen die aus den drei Winkelspitzen gezogenen geraden Linien den Triangel in drei gleiche Triangel theilen 8

6. Einen Triangel durch drei aus einem innerhalb des Triangels gegebenen Punkt gezogene Linien in drei gleiche Theile zu theilen 10

7. Innerhalb eines Triangels ein Qdrt. einzuschreiben 12

8. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß die durch zwei gegebene gerade Linien bestimmten Theile jener Linie unter sich in einem gegebenen Verhältniß stehen 15

9. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die durch die Peripherie eines gegebenen Kreises in einem gegebenen Verhältniß getheilt sei 14

10. Durch zwei in der Peripherie eines Kreises gegebene Punkte nach einem andern Punkt dieser Peripherie zwei gerade Linien zu ziehen, die zu einander in einem gegebenen Verhältniß stehen . . 16

11. Durch einen gegebenen Punkt nach einem Kreis eine Secante zu ziehen, so daß das Rectangel aus dem äußeren Theil und dem im Kreise enthaltenen Theil einem gegebenen Flächenraum gleich sei . 18

12. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der die Peripherie eines gegebenen Kreises halbirt 19

13. Eine gegebene gerade Linie in zwei Theile zu theilen so daß das über dem ersten Theil gezeichnete

Seite.

Quadrat gleich dem mit dem zweiten Theile und mit einer andern gegebenen Linie gebildeten Rectangel ist 21

14. Eine gegebene Linie in zwei Theile zu theilen, die unter sich in subduplicirtem Verhältniß von zwei andern ebenfalls gegebenen Theilen derselben Linien seien 25

15. Auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt zu finden so daß, wenn man durch diesen Punkt unter einer gegebenen Neigung eine gerade Linie bis an die Peripherie zieht, das Quadrat von dieser Linie zu dem Rectangel aus den beiden Segmenten des Durchmessers in einem gegebenen Verhältnisse stehe 27

16. Durch zwei gegebene Punkte nach einem Punkt der Peripherie eines gegebenen Kreises zwei gerade Linien so zu ziehen, daß die Sehne des zwischen ihnen enthaltenen Bogens parallel mit der die beiden gegebenen Punkte verbindenden Linie sei . . 29

17. Durch zwei gegebene Punkte nach einem Punkt der Peripherie eines Kreises zwei gerade Linien zu ziehen so daß die Sehne des dazwischen liegenden Bogens in einem gegebenen Punkt die Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte trifft . . 31

18. Durch zwei gegebene Punkte in der Peripherie eines Kreises zu einem andern Punkt in dem entgegengesetzten Theile der Peripherie gerade Linien zu ziehen, die einen gegebenen Durchmesser in zwei gleich weit vom Mittelp. liegenden Punkte schneiden 32

Seite.

19. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß das Rectangel aus den auf dieser Linie zwischen zwei gegebenen Linien enthaltene Rectangel gleich einem gegebenen Flächenraum sei 33

20. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei gegebenen geraden Linien zwei Segmente bestimmt, deren Summe gleich einer gegebenen Länge sei 36

21. Aus einer der Winkelspitzen eines Quadrats eine gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen den zwei entgegengesetzten Seiten des Quadrats enthaltene Theil gleich einer gegebenen Linie sei . 40

22. Wenn die Grundlinie eines Triangels, die Höhe und das Rectangel aus den beiden andern Seiten gegeben ist, den Triangel zu construiren . . . 42

23. Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Triangels und die Differenz oder die Summe der beiden andern Seiten gegeben sind, diesen Triangel zu construiren 44

24. Die Construktion eines regulären Fünfseits oder Zehnseits zu finden 45

25. Die nöthigen Bedingungen zur Trisection des Winkels zu finden 48

26. Die Bedingungen zu bestimmen, welche man befriedigen muß, um zwischen zwei gegebene gerade Linien zwei mittlere Proportionallinien einzuschalten 51

Seite.

27. Wenn in dem Halbkr. ABD (Fig. 27) die halbe Sehne EF u. der Halbm. CD auf dem Durchm. AB perpend. stehen, so verlangt man, eine gerade Linie AG zu ziehen so, daß $3AG^2 = AE^2 + EB^2 + EF^2$ . . . 55

28. Wenn einer von den Winkeln eines Triangels gegeben ist, so stehet der Ueberschuß vom Quadrat der Summe der Seiten, die diesen Winkel einschließen, über das Quadrat der Grundlinie zum Inhalt des Triangels in einem bestimmten Verhältniß 57

Zweites Buch, enthält 31 Sätze.

1. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei gegebenen Parallelen Abschnitte giebt, die zu einander ein gegebenes Verhältniß haben 59

2. Es sind zwei sich schneidende Linien der Lage nach gegeben; man soll durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche auf ihnen Abschnitte bestimmt, deren Verhältniß gleich einem gegebenen Verhältniß ist 61

3. Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf jeder von ihnen Abschnitte bestimmt, die ein gegebenes Verhältniß haben; diese Abschnitte so genommen, daß der erste vom Durchschnittspunkt an und der zweite vom gegebenen Punkt an gerechnet wird 62

Seite.

4. Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß die Entfernungen der Punkte, wo sie die beiden ersten trift, von zwei auf diesen Linien gegebenen Punkten in einem ebenfalls gegebenen Verhältniß seien 64

5. Wenn zwei Parallelen und eine sie schneidende gerade Linie gegeben sind, durch einen Punkt dieser Secante eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß die Abschnitte auf den Parallelen zwischen jener Linie und der Secante liegend ein gegebenes Rectangel bilden 65

6. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die auf zwei gegebenen Parallelen und von zwei auf denselben gegebenen Punkten ausgehend zwei Abschnitte giebt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei 67

7. Wenn zwei gerade Linien, die sich schneiden, gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, so daß die Abschnitte, welche sie auf ihnen von ihrem Zusammenlaufungspunkt an bestimmt, ein gegebenes Rectangel bilden 68

8. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie durch ihren Durchschnitt mit zwei sich schneidenden Linien einen Triangel von einem gegebenen Flächenraum bilde . . . 70

9. Wenn zwei gerade Linien, die sich schneiden, gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine andere gerade Linie zu ziehen, welche auf ihnen zwei

Seite.

Abschnitte bestimmt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei, wo diese Abschnitte, der eine vom Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie an und der andere von einem fixirten Punkt an auf einer dieser geraden Linie gerechnet werden 73

10. Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind so wie auch ein Punkt auf jeder von ihnen, durch einen andern gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, welche auf den beiden erstern und von jedem der auf ihnen gegebenen Punkte ausgehend Abschnitte bestimmt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Raume sei . . 75

11. Eine gegebene gerade Linie in zwei Abschnitte so zu theilen, daß das Quadrat über denen einen gleich sei dem Rectangel aus dem andern und einer gegebenen Linie 76

12. Eine gegebene Linie in zwei Abschnitte zu theilen, so daß das Quadrat des ersten in einem gegebenen Verhältniß mit dem aus dem zweiten und einer gegebenen geraden Linie construirten Rectangel sei 77

13. Wenn auf einer geraden Linie drei Punkte gegeben sind, so verlangt man, hierauf einen vierten zu finden, so daß das Rectangel gebildet aus seiner Entfernung vom ersten Punkte und einer gegebenen Linie gleich sei dem Rectangel, dessen Seiten seine Entfernungen von den beiden andern Punkten wären 78

Kreis beschrieben ist, der die unbestimmte Seite als Durchmesser hat.

Es sei das Polygon ABCDEF (Fig. 31), dessen Seiten AB, BC, CD, DE und EF beständig sind und auf einer veränderlichen Grundlinie AF stehen, so wird der Inhalt des Polygons sein Maximum erreicht haben, wenn AF der Durchmesser eines um das Polygon beschriebenen Kreises ist.

Beweis. In der That, ziehet AD und FD nach irgend einem der Scheitel D, so werden die Räume ABCD und DEF augenscheinlich die nämlichen bleiben, während sich der W. ADF vergrößern wird und die P. A und F sich von einander entfernen werden. Es wird also das Polygon die größte Fläche einschließen, wenn der zwischen den Seiten AD und DF enthaltene Tr. ADF sein Maximum erreicht haben wird. Jetzt wird der Tr. in diesem Zustand sein, wenn der aus F auf AD gefällte Prpd. der größtmögl. sein wird. Alsdann ist es klar, daß ADF ein rechter W. sein muß, und folgl. daß der P. D in einer halben Kreisperiph. liegt, deren Durchm. AF ist. Wendet man diese Schlüsse auf alle Scheitel B, C, E an, so wird man sehen, daß alle in einem halben Kreisumfang liegen müssen, dessen Durchmesser AF.

Erster Zus. Es enthält also ein Polygon, dessen Seiten gegeben sind, die größte Fläche, wenn es in einen

Kreise eingeschr. werden kann. Denn es sei ABCD ein Polygon, dessen Seiten alle gegeben sind; ziehet den Durchm. AF und ziehet DF. Das so gebildete Polygon ABCDF ist ein Maximum; aber der Tr. ADF ist offenbar bestimmt, mithin ist das übrigbleibende Polygon ABCD auch ein Maximum.

Zweiter Zus. Es erhellet hieraus, daß von allen isoperimetrischen Polyg. von einer gegeb. Seitenzahl das reguläre Polyg. das größte ist. Denn nach dem vorherg. Satze muß dieses Polygons Maximum alle seine Seiten gl. haben, und seine W. sind auch gleich, weil alle ihre Scheitel auf der dem Polyg. umschr. Kreisperiph. liegen.

XXXII. Satz.

Lehrsatz.

Der Kreis ist von allen isoperimetrischen Figuren die größte.

Beweis. Durch die vorherg. Sätze ist es klar, daß, wenn der Umfang und die Seitenzahl gegeben ist, das Maximum der Figur ein regul. Polyg. ist. Es sei ABCDEF (Fig. 32) ein solches Polyg., das den gegeb. Umfang hat. Halbiret die dem umschr. Kreis corresp. Bog. und schreibet in diesen Kr. ein regul. Polygon MBGC . . LA von doppelter Seitenzahl als das vorherg. ein. Ziehet den Durchm. MI und die gr. L. MD und OD. Die zwei Polyg. sind jedes zusammengesetzt aus einerlei Anz. von Tr. gl. ODN für das eine u. gl. ODI für das andere; ihre Flächen sind also unter sich wie

ON zu NI oder, welches einerlei, wie PN zu MI. Wenn aber das große Polygon M . . . A ſich reducirt hätte zu einem ähnl. Polyg. von demſelben Umfange als A...F und deſſen zu DI gleichliegenden Seiten gl. DE wären, ſo wären die ähnl. Pol. in dem Verh. von DI^2 zu DN^2 d. h. wie MI zu MN. Folglich iſt das primitive Polyg. A . . . F zu einem andern Polyg. von einerlei Umfang und von einer doppelten Seitenzahl wie PN zu MN. Eine Fig. von einem beſtändig. Umfange hat alſo einen nach u. nach größern Flächeninh., je nachdem man die Zahl ſeiner Seiten verdoppelt. Wenn man dieſe Verdop. fortſetzt, ſo wird das hieraus entſtehende Polyg. eine immerwährend wachſende Fläche erreichen. Alſo muß der Kr., welcher die Grz. iſt, deren ſich alle dieſe Pol. nähern, ſo wie ihre Seitenzahl wächſt, bei einerlei Umfang, den größten Raum einſchließen.

Inhalt.

Geometrische Analysis.

Seite.

Erklärung des Begriffs Analysis . . . 1

Erstes Buch, enthält 28 Sätze.

Jeder Satz enthält zwei Auflösungsweisen, Analysis und Synthesis.

1. Durch zwei gegebene Punkte zwei schiefe Linien nach einer geraden Linie zu ziehen, die gegen letztere gleich geneigt sind 4

2. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die mit zwei der Lage nach gegebenen geraden Linien gleiche Winkel macht 5

3. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß diejenigen Abschnitte, die zwischen den auf ihr aus zwei gegebenen Punkten gefällten Perpendikeln liegen, einander gleich seien . . 6

4. Einen Triangel in zwei gleiche Theile durch eine gerade Linie zu theilen, die durch einen auf einer der Seiten gegebenen Punkt geht 7

Seite

5. Innerhalb eines Triangels einen Punkt zu finden, durch welchen die aus den drei Winkelspitzen gezogenen geraden Linien den Triangel in drei gleiche Triangel theilen 8

6. Einen Triangel durch drei aus einem innerhalb des Triangels gegebenen Punkt gezogene Linien in drei gleiche Theile zu theilen 10

7. Innerhalb eines Triangels ein Qdrt. einzuschreiben 12

8. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß die durch zwei gegebene gerade Linien bestimmten Theile jener Linie unter sich in einem gegebenen Verhältniß stehen 13

9. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die durch die Peripherie eines gegebenen Kreises in einem gegebenen Verhältniß getheilt sei 14

10. Durch zwei in der Peripherie eines Kreises gegebene Punkte nach einem andern Punkt dieser Peripherie zwei gerade Linien zu ziehen, die zu einander in einem gegebenen Verhältniß stehen . . 16

11. Durch einen gegebenen Punkt nach einem Kreis eine Secante zu ziehen, so daß das Rectangel aus dem äußeren Theil und dem im Kreise enthaltenen Theil einem gegebenen Flächenraum gleich sei . 18

12. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der die Peripherie eines gegebenen Kreises halbirt 19

13. Eine gegebene gerade Linie in zwei Theile zu theilen so daß das über dem ersten Theil gezeichnete

Seite.

Quadrat gleich dem mit dem zweiten Theile und mit einer andern gegebenen Linie gebildeten Rectangel ist 21

14. Eine gegebene Linie in zwei Theile zu theilen, die unter sich in subduplicirtem Verhältniß von zwei andern ebenfalls gegebenen Theilen derselben Linien seien 25

15. Auf dem Durchmesser eines Kreises einen Punkt zu finden so daß, wenn man durch diesen Punkt unter einer gegebenen Neigung eine gerade Linie bis an die Peripherie zieht, das Quadrat von dieser Linie zu dem Rectangel aus den beiden Segmenten des Durchmessers in einem gegebenen Verhältnisse stehe 27

16. Durch zwei gegebene Punkte nach einem Punkt der Peripherie eines gegebenen Kreises zwei gerade Linien so zu ziehen, daß die Sehne des zwischen ihnen enthaltenen Bogens parallel mit der die beiden gegebenen Punkte verbindenden Linie sei . . 29

17. Durch zwei gegebene Punkte nach einem Punkt der Peripherie eines Kreises zwei gerade Linien zu ziehen so daß die Sehne des dazwischen liegenden Bogens in einem gegebenen Punkt die Verbindungslinie der zwei gegebenen Punkte trifft . . 31

18. Durch zwei gegebene Punkte in der Peripherie eines Kreises zu einem andern Punkt in dem entgegengesetzten Theile der Peripherie gerade Linien zu ziehen, die einen gegebenen Durchmesser in zwei gleich weit vom Mittelp. liegenden Punkte schneiden 32

Seite.

19. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß das Rectangel aus den auf dieser Linie zwischen zwei gegebenen Linien enthaltene Rectangel gleich einem gegebenen Flächenraum sei 33

20. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei gegebenen geraden Linien zwei Segmente bestimmt, deren Summe gleich einer gegebenen Länge sei 36

21. Aus einer der Winkelspitzen eines Quadrats eine gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen den zwei entgegengesetzten Seiten des Quadrats enthaltene Theil gleich einer gegebenen Linie sei . 40

22. Wenn die Grundlinie eines Triangels, die Höhe und das Rectangel aus den beiden andern Seiten gegeben ist, den Triangel zu construiren . . . 42

23 Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Triangels und die Differenz oder die Summe der beiden andern Seiten gegeben sind, diesen Triangel zu construiren 44

24. Die Construktion eines regulären Fünfseits oder Zehnseits zu finden 45

25. Die nöthigen Bedingungen zur Trisection des Winkels zu finden 48

26. Die Bedingungen zu bestimmen, welche man befriedigen muß, um zwischen zwei gegebene gerade Linien zwei mittlere Proportionallinien einzuschalten 51

Seite.

27. Wenn in dem Halbkr. ABD (Fig. 27) die halbe Sehne EF u. der Halbm. CD auf dem Durchm. AB perpend. stehen, so verlangt man, eine gerade Linie AG zu ziehen so, daß $3AG^2 = AE^2 + EB^2 + EF^2$ . . . 55

28. Wenn einer von den Winkeln eines Triangels gegeben ist, so stehet der Ueberschuß vom Quadrat der Summe der Seiten, die diesen Winkel einschließen, über das Quadrat der Grundlinie zum Inhalt des Triangels in einem bestimmten Verhältniß 57

Zweites Buch, enthält 31 Sätze.

1. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf zwei gegebenen Parallelen Abschnitte giebt, die zu einander ein gegebenes Verhältniß haben 59

2. Es sind zwei sich schneidende Linien der Lage nach gegeben; man soll durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie ziehen, welche auf ihnen Abschnitte bestimmt, deren Verhältniß gleich einem gegebenen Verhältniß ist 61

3. Wenn zwei sich schneidende Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, welche auf jeder von ihnen Abschnitte bestimmt, die ein gegebenes Verhältniß haben; diese Abschnitte so genommen, daß der erste vom Durchschnittspunkt an und der zweite vom gegebenen Punkt an gerechnet wird 62

Seite

4. Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine Linie so zu ziehen, daß die Entfernungen der Punkte, wo sie die beiden ersten trift, von zwei auf diesen Linien gegebenen Punkten in einem ebenfalls gegebenen Verhältniß seien 64

5. Wenn zwei Parallelen und eine sie schneidende gerade Linie gegeben sind, durch einen Punkt dieser Secante eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß die Abschnitte auf den Parallelen zwischen jener Linie und der Secante liegend ein gegebenes Rectangel bilden 65

6. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, die auf zwei gegebenen Parallelen und von zwei auf denselben gegebenen Punkten ausgehend zwei Abschnitte giebt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei 67

7. Wenn zwei gerade Linien, die sich schneiden, gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, so daß die Abschnitte, welche sie auf ihnen von ihrem Zusammenlaufungspunkt an bestimmt, ein gegebenes Rectangel bilden 68

8. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so zu ziehen, daß sie durch ihren Durchschnitt mit zwei sich schneidenden Linien einen Triangel von einem gegebenen Flächenraum bilde . . . 70

9. Wenn zwei gerade Linien, die sich schneiden, gegeben sind, durch einen gegebenen Punkt eine andere gerade Linie zu ziehen, welche auf ihnen zwei

Seite.

Abschnitte bestimmt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Rectangel sei, wo diese Abschnitte, der eine vom Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie an und der andere von einem fixirten Punkt an auf einer dieser geraden Linie gerechnet werden 73

10. Wenn zwei sich schneidende gerade Linien gegeben sind so wie auch ein Punkt auf jeder von ihnen, durch einen andern gegebenen Punkt eine dritte gerade Linie zu ziehen, welche auf den beiden erstern und von jedem der auf ihnen gegebenen Punkte ausgehend Abschnitte bestimmt, deren Rectangel gleich einem gegebenen Raume sei . . 75

11. Eine gegebene gerade Linie in zwei Abschnitte so zu theilen, daß das Quadrat über denen einen gleich sei dem Rectangel aus dem andern und einer gegebenen Linie 76

12. Eine gegebene Linie in zwei Abschnitte zu theilen, so daß das Quadrat des ersten in einem gegebenen Verhältniß mit dem aus dem zweiten und einer gegebenen geraden Linie construirten Rectangel sei 77

13. Wenn auf einer geraden Linie drei Punkte gegeben sind, so verlangt man, hierauf einen vierten zu finden, so daß das Rectangel gebildet aus seiner Entfernung vom ersten Punkte und einer gegebenen Linie gleich sei dem Rectangel, dessen Seiten seine Entfernungen von den beiden andern Punkten wären 78

Seite.

24. Wenn drei Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so verlangt man, auf ihr einen vierten zu finden, so daß das Rectangel aus seiner Entfernung vom ersten Punkt und einer gegebenen Linie in einem gegebenen Verhältniß mit dem Rectangel sei, welches zu Seiten seine Entfernungen von den beiden andern Punkten haben würde 79

25. Wenn zwei Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so verlangt man, darauf einen vierten zu finden, so daß das Quadrat von seiner Entfernung vom ersten Punkte gleich sei dem Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden andern Punkten 80

26. Wenn drei Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, darauf einen vierten zu finden, so daß das Quadrat seiner Entfernung vom ersten Punkte in einem gegebenen Verhältniß mit dem Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden andern Punkten sei 85

27. Wenn vier Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so soll man einen fünften darauf finden, so daß das Rectangel aus ihren Entfernungen von den beiden ersten in einem gegebenen Verhältniß mit dem Rectangel aus ihren Entfernungen von den beiden andern sei 87

28. Wenn vier Punkte auf einer geraden Linie gegeben sind, so soll man einen fünften darauf finden, so daß das Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden äußersten Punten in einem ge-

Seite.

gebenen Verhältniß sei mit dem Rectangel aus seinen Entfernungen von den beiden mittlern P. . 89

19. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie so ziehen, daß der zwischen einer gegebenen Kreisperipherie enthaltene Theil gleich einer gegebenen Linie sei 95

20. Durch einen gegebenen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, so daß der zwischen zwei gegebenen concentrischen Kreis-Peripherieen enthaltene Theil von gegebener Länge sei 96

21. Wenn zwei beliebige Kreise gegeben sind und ein Punkt auf der geraden Linie, welche ihre Mittelpunkte verbindet, so daß die Entfernungen dieses Punktes von den Mittelpunkten der Kreise ihren Halbmessern proportional seien, so verlangt man eine andere gerade Linie zu ziehen, von welcher der zwischen den beiden Peripherieen enthaltene Theil eine gegebene Länge habe 98

22. Wenn zwei Kreise, davon der eine innerhalb des andern liegt, gegeben sind, durch einen in der Peripherie des kleinern und in der durch beide Mittelpunkte gehenden geraden Linie befindlichen Punkt eine gerade Linie zu ziehen, so daß der zwischen den beiden Peripherieen enthaltene Theil von einer gegebenen Länge sei 99

23. Aus dem Endpunkte des Durchmessers von einem gegebenen Kreise eine gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen der Peripherie und einem Per-

Seite.

penbikel auf diesem Durchmesser enthaltene Theil von einer gegebenen Länge sei 102

24. Durch einen in einer geraden Linie, welche einen Winkel halbirt, gegebenen Punkt eine andere gerade Linie so zu ziehen, daß der zwischen den beiden Schenkeln des Winkels enthaltene Theil von gegebener Länge sei 103

25. Durch den Scheitel eines Rhombus eine gerade Linie zu ziehen, so daß der Theil zwischen den beiden Seiten, der sie begegnet, von einer gegebenen Länge sei 105

26. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der eine der Lage nach gegebene gerade Linie berührt 110

27. Durch einen gegebenen Punkt einen Kreis zu legen, der zwei der Lage nach gegebene gerade Linien berührt 112

28. Durch zwei gegebene Punkte einen Kreis zu legen, der einen gegebenen Kreis berührt . . . 115

29. Durch einen gegebenen Punkt einen Berührungskreis zu einem gegebenen Kreise und zu einer der Lage nach gegebenen geraden Linie zu legen . . 116

30. Durch einen gegebenen Punkt einen Berührungskreis zu zwei gegebenen Kreisen zu beschreiben 119

31. Einen Berührungskreis zu zwei gegebenen geraden Linien und zu einem gegebenen Kreise zu beschreiben 122

Drittes Buch, enthält 32 Sätze.

Seite.

1. Wenn man durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen geraden Linie Linien zieht, welche in einem bekannten Verhältniß geschnitten sind, so ist der Ort der Theilungspunkte eine andere der Lage nach bestimmte gerade Linie 126

2. Wenn man einem gegebenen Punkt nach der Peripherie eines ebenfalls gegebenen Kreises gerade Linien ziehet und sie in einem bekannten Verhältniß schneidet, so ist der Ort der Theilungspunkte eine Peripherie von einem bestimmten Kreise . . 128

3. Auf jedem von den Schenkeln eines gegebenen W. nimmt man einen Punkt an und, ohne weder das Verhältniß der Entfernungen der beiden so bestimmten Punkte vom Scheitel des Winkels noch die Lage dieses Scheitels, noch auch die Größe der Winkels zu ändern, nimmt man an, daß einer der Punkte eine gegebene gerade Linie durchlaufe; man verlangt, zu beweisen, daß der andere Punkt ebenfalls eine bestimmte gerade Linie als Ort hat . 129

4. Wenn man durch einen fixen Punkt zwei gerade Linien zieht, deren Längen in einem beständigen Verhältniß sind und deren Neigung unveränderlich ist, wenn der Endpunkt der einen eine Peripherie von einem bestimmten Kreise durchläuft, so wird der Endpunkt der andern ebenfalls zum Orte eine bestimmte Kreisperipherie haben 131

5. Eine durch einen fixen Punkt gezogene gerade Linie ist in einem Punkte ihrer Länge in zwei Theile

Seite

so getheilt, daß das Rectangel aus dem einen und der ganzen Linie gleich einem beständigen und gegebenen Rectangel sei; u. wenn der Durchschnittspunkt eine gegebene gerade Linie durchläuft, so wird der Endpunkt der beweglichen Linie zum Ort eine bestimmte Kreisperipherie haben . . . 133

6. Eine gerade Linie, die beständig durch einen fixen Punkt gehet, ist in zwei Theile getheilt, so daß das Rectangel aus dem einem vom fixen Punkt an und aus der ganzen Linie beständig gleich sei einem gegebenen Rectangel; u. wenn der Theilungspunkt einen gegebene Kreis durchläuft, so wird der Endpunkt der geraden Linie zum Ort eine der Lage nach beständige gerade Linie oder eine Peripherie eines bestimmten Kreises haben, je nachdem der fixe Punkt in oder nicht in der gegebenen Kreisperipherie liegen wird 135

7. Wenn die Größe eines Winkels, sein Scheitel und das Rectangel aus seinen Seiten fixirt und gegeben sind und wenn der Endpunkt von einer der Seiten eine gegebene gerade Linie durchläuft, so wird der Endpunkt der andern eine bestimmte Kreisperipherie zum Orte haben 138

8. Wenn zwei gerade Linien, deren Längen in einem beständigen Verhältniß sind, sich bewegen, indem sie sich mit Beibehaltung ihrer Richtung immer auf zwei fixe gegebene gerade Linien stützen, so wird ihr Durchschnittspunkt eine bestimmte gerade Linie beschreiben 139

9. Wenn

Seite.

9. Wenn drei gerade Linien, die in einem Punkte zusammenlaufen, der Lage nach gegeben sind und durch eine vierte unter einem bestimmten Winkel geschnitten werden so daß das Rectangel aus ihrem ersten Abschnitt und einer gegebenen geraden Linie gleich der Summe der Rectangel aus ihrem ersten und ihrem zweiten Abschnitt mit gegebenen Linien seien; der Ort der Punkte, von wo an die Abschnitte gerechnet werden, ist eine gerade Linie 141

10. Sind vier gerade Linien, die in einem Punkte zusammenlaufen, der Lage nach gegeben, und eine fünfte gerade Linie schneidet sie unter einem beständigen Winkel so daß die Summe der Rectangel aus ihrem ersten und zweiten Abschnitt mit gegebenen Linien gleich der Summe der Rectangel aus ihrem dritten und vierten Abschnitte mit andern gegebenen Linien sei, so wird der Punkt, von welchem an alle Abschnitte genommen sind, eine gerade Linie zum Orte haben 143

11. Wenn eine der Lage nach gegebene gerade Linie von zwei andern geraden Linien unter gegebenen Neigungen geschnitten wird und so daß auf ihr, von zwei fixen Punkten ausgegangen, Abschnitte enthalten sind, deren Verhältniß beständig ist, so hat der Treffpunkt der zwei beweglichen geraden Linien zum Orte eine bestimmte gerade Linie . . 145

12. Wenn man durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zieht, deren Längen unter sich in einem beständigen Verhältniß sind, so wird der Treff-

Seite

punkt dieſer Linien zum Ort eine gerade Linie oder einen beſtimmten Kreis haben 14

13. Wenn ein beweglicher Punkt dieſer Bedingung unterworfen iſt, daß das Quadrat ſeiner Entfernung von einem fixen gegebenen Punkte gleich einem Rectangel aus ſeiner Entfernung von einer fixen geraden Linie und von einer andern gegebenen Linie iſt, ſo iſt der Ort eine Peripherie von einem beſtimmten Kreiſe 15

14. Wenn man durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zieht, die ſich ſchneiden und ſo beſchaffen ſind, daß der Unterſchied vom Quadrate der einen und einem gegebenen Raum in einem beſtändigen Verhältniß mit dem Quadrate der andern iſt, ſo iſt der Ort des Durchſchnitts dieſer geraden Linie eine beſtimmte Kreisperipherie 15

15. Wenn man durch einen gegebenen Punkt zwei gerade Linien zieht, die ſich ſo ſchneiden, daß die Differenz ihrer Quadrate beſtändig ſei, ſo beſchreibet ihr Durchſchnittspunkt eine der Lage nach beſtimmte gerade Linie 15

16. Wenn man auf einer in C ſo in zwei Theile getheilten geraden Linie AB, daß $BC = n \cdot AC$, einen beliebigen Punkt D nimmt, ſo wird man die Gleichung haben $n \cdot AD^2 + BD^2 = AB \cdot BC + (n+1)\,CD^2$ 15

17. Wenn man durch mehrere gegebene fixe Punkte gerade Linien zieht, die ſich alle in einem Punkte

Seite.

endigen und ſo, daß die Summe ihrer Quadrate beſtändig gleich einem gegebenen Raum iſt, ſo wird ihr Durchſchnittspunkt zum Orte einen beſtimmten Kreis haben 157

Von den Porismen.

18. Wenn drei Punkte gegeben ſind, ſo kann man einen vierten finden, ſo daß, wenn man eine gerade Linie durchzieht, die Summe der Entfernungen dieſer geraden Linie von den erſten zwei gegebenen Punkten gleich ihrer Entfernung vom dritten Punkte ſei. 164

19. Wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben iſt, ſo kann man einen Punkt finden, ſo daß jede dadurch gelegte gerade Linie und die durch den Kreis und die gerade Linie begrenzt iſt, in dem geſuchten Punkte in zwei Segmente getheilt iſt, deren Rectangel beſtimmt iſt 167

20. Wenn ein Kreis und ein Punkt gegeben iſt, ſo kann man einen andern Punkt finden ſo daß, wenn man aus dieſem Punkte und aus dem erſten zwei gerade Linien nach einem beliebigen Punkte der Peripherie zieht, dieſe zwei geraden Linien immer in einem gegebenen Verhältniß ſeien . . . 169

21. Wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben ſind, ſo kann man einen Punkt finden ſo daß jede durch dieſen Punkt nach der gegebenen Linie gezogene gerade Linie eine mittlere Proportionale

Seite

zwischen den beiden Abschnitten sei, welche innerhalb der Kreisperipherie und der gegebenen geraden Linie enthalten sind 171

22. Wenn ein Punkt auf dem Durchmesser eines Kreises gegeben ist, so kann man in der Verlängerung dieses Durchmessers einen andern Punkt finden so daß der Winkel, der durch zwei gerade Linien gebildet wird, die aus diesem Punkte nach den Endpunkten einer beliebigen Sehne, welche durch den gegebenen Punkt gehet, gezogen werden, durch den Durchmesser halbirt sei 174

23. Wenn ein Punkt in dem Umfange eines Kreises gegeben ist, so kann man einen andern Punkt finden so daß zwei durch diesen Punkt und durch den ersten nach der entgegensetzten Seite der Peripherie gezogene gerade Linien, auf einer gegebenen Sehne Segmente abschneiden, deren Rectangel unter sich in einem bekannten Verhältniß seien . . . 176

24. Wenn man durch zwei gegebene Punkte zu einer von zwei gegebenen Linien zwei gerade Linien zieht, welche die andere Linie in zwei Punkten schneiden, so kann man auf dieser zweiten Linie zwei fixirte Punkte finden so daß das Rectangel aus ihren Entfernungen vom Durchschnittspunkte gleich sei einem angeblichen Rectangel, welches dasselbe bleibt, welches auch immer die Richtung der zwei geraden Secanten sein mag 179

Seite.

25. Wenn drei nicht parallele der Lage nach gegebene Linien gegeben sind, so kann man eine vierte finden so daß, wenn man quer durch die vier geraden Linien Parallelen zu einer fünften gegebenen geraden Linie zieht, diese Parallelen die ersten vier geraden Linien in proportionale Theile theilen, deren Verhältnisse beständig sind 182

Isoperimetrische Figuren.

26. Auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden so daß die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei. 187

27. Zwei durch zwei gegebene Punkte nach einerlei Punkt im Umfange eines Kreises gezogene gerade Linien bilden die kleinstmögliche Summe, wenn sie gegen die durch ihren Treffpunkt gezogene Tangente gleich geneigt sind 189

28. Einen Punkt zu finden so daß die Summe seiner Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei 190

29. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden so daß die aus diesem Punkte nach zwei gegebenen Punkten gezogenen Linien den größtmöglichen Winkel einschließen. 191

30. Unter allen isoperimetrischen Triangeln, die über einerlei Grundlinie stehen, denjenigen zu bestimmen, dessen Flächeninhalt der größte ist . . 192

Seite.

31. Ein Polygon, von welchem alle Seiten gegeben sind, eine ausgenommen, schließt den größtmöglichen Flächeninhalt ein, wenn es in einen Halbkreis beschrieben ist, der die unbestimmte Seite als Durchmesser hat 194

32. Der Kreis ist von allen isoperimetrischen Figuren die größte 195

Anhang.

Verſuch einer Wiederherſtellung der Bücher

des

Apollonius von Perga

von den Berührungen.

Von

J. P. Gruſon.

Pappus Alexandrinus liefert im siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen unter mehrern Hülfssätzen zu den Werken alter Mathematiker auch die Hülfssätze zu einem Werke des Apollonius Pergäus, das aus zwei Büchern bestanden und dessen Inhalt die Auflösung folgender Aufgabe war:

Wenn von Punkten, geraden Linien und Kreisen irgend drei Stücke gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, der die gegebenen Seiten berührt.

Von diesen zwei Büchern des Apollonius, die Berührungen betreffend, folgt hier eine aus dem Griechischen von einem Freunde mir mitgetheilte Uebersetzung.

Zwei Bücher von den Berührungen.

Nach diesen Büchern folgen die zwei Bücher von den Berührungen. Es scheinen in ihnen mehrere Aufgaben zu sein. Wir wollen sie aber in folgende einzige zusammenfassen:

Wenn irgend drei Punkte, gerade Linien oder Kreise der Lage nach gegeben sind, einen Kreis zu ziehen, der durch einen jeden der gegebenen Punkte, wenn deren gegeben sind, hindurch geht und die gegebenen Kreise und Linien berührt.

Wegen der Anzahl der durch die Annahme gegebene gleichen oder theilweise verschiedenen Dinge dieser Aufg. müssen nothwendig zehn verschiedene Aufg. entstehen; denn aus drei ungleichen Dingen entstehn zehn verschiedene ungeordnete Triaden. Es sind nämlich entweder gegeben drei Punkte oder drei gerade Linien oder zwei Punkte und Eine gerade Linie oder zwei gerade Linien und Ein Punkt oder zwei Punkte und Ein Kreis oder zwei Kreise und Ein Punkt oder

zwei gerade Linien und Ein Kreis oder zwei Kreise und Eine gerade Linie oder Ein Punkt Eine gerade Linie u. Ein Kreis oder drei Kreise. Die zwei ersten dieser Aufg. werden im vierten Buche der Elemente gezeigt, die ich geschrieben habe; denn wenn drei Punkte gegeben sind, die nicht in einer geraden Linie liegen, so ist dies keine andere Aufg. als die, um einen Triangel einen Kreis zu ziehen.

Sind aber drei gerade Linien gegeben, die nicht parallel laufen sondern alle drei einander schneiden, so ist es nichts anders, als in einem gegebenen Triangel einen Kreis zu beschreiben. Der Fall also, wo zwei parallele Linien gegeben sind, die von einer dritten durchschnitten werden, steht hier als ein Theil der zweiten Unterabtheilung aller Aufgaben voran.

Nach der angeführten Ordnung werden die sechs Aufg. im ersten Buche abgehandelt; im zweiten aber blos die beiden, wo zwei gerade Linien und Ein Kreis und wo drei Kreise gegeben sind, weil mehrere wechselseitige Lagen der Kreise und geraden Linien Statt finden, und also mehrere Unterabtheilungen nöthig sind.

Es giebt eine mit den angeführten Problemen von den Berührungen verwandte Anzahl von Aufg., welche von Einigen, die diese Probleme aufgaben, übergangen wurden; andere aber gaben sie eher aufzulösen als die zwei genannten Bücher; denn sie

war leicht und mehr eine Einleitung in die Gattung der Aufg. von den Berührungen, indem sie dieselben zugleich ergänzte und vollständig machte.

Ich will wieder Alles in folgende einzige Aufg. zusammenfassen, in welcher zwar nicht so viel gegeben aber mehr verlangt wird: wenn irgend zwei Punkte, gerade Linien oder Kreise gegeben sind, einen der Größe nach gegebenen Kreis zu beschreiben, der durch einen oder beide gegebene Punkte, wenn deren gegeben sind, hindurchgeht, und die gegebenen Linien oder Kreise berührt. Die Anzahl der Aufg., welche dieses Problem enthält, ist sechs. Denn aus drei verschiedenen Dingen, entstehen sechs verschiedene ungeordnete Dyaden, weil entweder zwei Punkte gegeben oder zwei gerade Linien oder zwei Kreise oder Ein Punkt und Eine gerade Linie, oder Ein Punkt und Ein Kreis oder Eine gerade Linie und Ein Kreis gegeben sind, wo dann der seiner Größe nach gegebene Kreis, wie gesagt, beschrieben werden muß.

Dieses Problem muß nach den verschiedenen Fällen aufgelöst, zusammengestellt und unterschieden werden.

Das erste Buch von den Berührungen enthält sechs, das zweite vier Aufg. Die zwei Bücher haben ein und zwanzig Hülfssätze. Der Aufg. sind sechzig.

Seite.

punkt dieſer Linien zum Ort eine gerade Linie oder einen beſtimmten Kreis haben 147

13. Wenn ein beweglicher Punkt dieſer Bedingung unterworfen iſt, daß das Quadrat ſeiner Entfernung von einem fixen gegebenen Punkte gleich einem Rectangel aus ſeiner Entfernung von einer fixen geraden Linie und von einer andern gegebenen Linie iſt, ſo iſt der Ort eine Peripherie von einem beſtimmten Kreiſe 150

14. Wenn man durch zwei gegebene Punkte zwei gerade Linien zieht, die ſich ſchneiden und ſo beſchaffen ſind, daß der Unterſchied vom Quadrate der einen und einem gegebenen Raum in einem beſtändigen Verhältniß mit dem Quadrate der andern iſt; ſo iſt der Ort des Durchſchnitts dieſer geraden Linie eine beſtimmte Kreisperipherie 151

15. Wenn man durch einen gegebenen Punkt zwei gerade Linien zieht, die ſich ſo ſchneiden, daß die Differenz ihrer Quadrate beſtändig ſei, ſo beſchreibet ihr Durchſchnittspunkt eine der Lage nach beſtimmte gerade Linie 154

16. Wenn man auf einer in C ſo in zwei Theile getheilten geraden Linie AB, daß BC = n . AC, einen beliebigen Punkt D nimmt, ſo wird man die Gleichung haben n . AD^2 + BD^2 = AB . BC + (n + 1) CD^2 155

17. Wenn man durch mehrere gegebene fixe Punkte gerade Linien zieht, die ſich alle in einem Punkte

Seite.

endigen und so, daß die Summe ihrer Quadrate beständig gleich einem gegebenen Raum ist, so wird ihr Durchschnittspunkt zum Orte einen bestimmten Kreis haben 157

Von den Porismen.

18. Wenn drei Punkte gegeben sind, so kann man einen vierten finden, so daß, wenn man eine gerade Linie durchzieht, die Summe der Entfernungen dieser geraden Linie von den ersten zwei gegebenen Punkten gleich ihrer Entfernung vom dritten Punkte sei. 164

19. Wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben ist, so kann man einen Punkt finden, so daß jede dadurch gelegte gerade Linie und die durch den Kreis und die gerade Linie begrenzt ist, in dem gesuchten Punkte in zwei Segmente getheilt ist, deren Rectangel bestimmt ist 167

20. Wenn ein Kreis und ein Punkt gegeben ist, so kann man einen andern Punkt finden so daß, wenn man aus diesem Punkte und aus dem ersten zwei gerade Linien nach einem beliebigen Punkte der Peripherie zieht, diese zwei geraden Linien immer in einem gegebenen Verhältniß seien . . 169

21. Wenn ein Kreis und eine gerade Linie gegeben sind, so kann man einen Punkt finden so daß jede durch diesen Punkt nach der gegebenen Linie gezogene gerade Linie eine mittlere Proportionale

Seite

zwischen den beiden Abschnitten sei, welche innerhalb der Kreisperipherie und der gegebenen geraden Linie enthalten sind 171

22. Wenn ein Punkt auf dem Durchmesser eines Kreises gegeben ist, so kann man in der Verlängerung dieses Durchmessers einen andern Punkt finden so daß der Winkel, der durch zwei gerade Linien gebildet wird, die aus diesem Punkte nach den Endpunkten einer beliebigen Sehne, welche durch den gegebenen Punkt gehet, gezogen werden, durch den Durchmesser halbirt sei 174

23. Wenn ein Punkt in dem Umfange eines Kreises gegeben ist, so kann man einen andern Punkt finden so daß zwei durch diesen Punkt und durch den ersten nach der entgegengesetzten Seite der Peripherie gezogene gerade Linien, auf einer gegebenen Sehne Segmente abschneiden, deren Rectangel unter sich in einem bekannten Verhältniß seien . . . 176

24. Wenn man durch zwei gegebene Punkte zu einer von zwei gegebenen Linien zwei gerade Linien zieht, welche die andere Linie in zwei Punkten schneiden, so kann man auf dieser zweiten Linie zwei fixirte Punkte finden so daß das Rectangel aus ihren Entfernungen vom Durchschnittspunkte gleich sei einem angeblichen Rectangel, welches dasselbe bleibt, welches auch immer die Richtung der zwei geraden Secanten sein mag 179

Seite.

25. Wenn drei nicht parallele der Lage nach gegebene Linien gegeben sind, so kann man eine vierte finden so daß, wenn man quer durch die vier geraden Linien Parallelen zu einer fünften gegebenen geraden Linie zieht, diese Parallelen die ersten vier geraden Linien in proportionale Theile theilen, deren Verhältnisse beständig sind . . . 182

Isoperimetrische Figuren.

26. Auf einer der Lage nach gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden so daß die Summe seiner Entfernungen von zwei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei. 187

27. Zwei durch zwei gegebene Punkte nach einerlei Punkt im Umfange eines Kreises gezogene gerade Linien bilden die kleinstmögliche Summe, wenn sie gegen die durch ihren Treffpunkt gezogene Tangente gleich geneigt sind 189

28. Einen Punkt zu finden so daß die Summe seiner Entfernungen von drei gegebenen Punkten die kleinstmögliche sei 190

29. Auf einer gegebenen geraden Linie einen Punkt zu finden so daß die aus diesem Punkte nach zwei gegebenen Punkten gezogenen Linien den größtmöglichen Winkel einschließen. 191

30. Unter allen isoperimetrischen Triangeln, die über einerlei Grundlinie stehen, denjenigen zu bestimmen, dessen Flächeninhalt der größte ist . . 192

Seite.

31. Ein Polygon, von welchem alle Seiten gegeben sind, eine ausgenommen, schließt den größtmöglichen Flächeninhalt ein, wenn es in einen Halbkreis beschrieben ist, der die unbestimmte Seite als Durchmesser hat 194

32. Der Kreis ist von allen isoperimetrischen Figuren die größte 195

Anhang.

Verſuch einer Wiederherſtellung der Bücher

des

Apollonius von Perga

von den Berührungen.

Von

J. P. Gruſon.

Pappus Alexandrinus liefert im siebenten Buche seiner mathematischen Sammlungen unter mehrern Hülfssätzen zu den Werken alter Mathematiker auch die Hülfssätze zu einem Werke des Apollonius Pergäus, das aus zwei Büchern bestanden und dessen Inhalt die Auflösung folgender Aufgabe war:

Wenn von Punkten, geraden Linien und Kreisen irgend drei Stücke gegeben sind, einen Kreis zu beschreiben, der die gegebenen Seiten berührt.

Von diesen zwei Büchern des Apollonius, die Berührungen betreffend, folgt hier eine aus dem Griechischen von einem Freunde mir mitgetheilte Uebersetzung.

Zwei Bücher von den Berührungen.

Nach diesen Büchern folgen die zwei Bücher von den Berührungen. Es scheinen in ihnen mehrere Aufgaben zu sein. Wir wollen sie aber in folgende einzige zusammenfassen:

Wenn irgend drei Punkte, gerade Linien oder Kreise der Lage nach gegeben sind, einen Kreis zu ziehen, der durch einen jeden der gegebenen Punkte, wenn deren gegeben sind, hindurch geht und die gegebenen Kreise und Linien berührt.

Wegen der Anzahl der durch die Annahme gegebene gleichen oder theilweise verschiedenen Dinge dieser Aufg. müssen nothwendig zehn verschiedene Aufg. entstehen; denn aus drei ungleichen Dingen entstehn zehn verschiedene ungeordnete Triaden. Es sind nämlich entweder gegeben drei Punkte oder drei gerade Linien oder zwei Punkte und Eine gerade Linie oder zwei gerade Linien und Ein Punkt oder zwei Punkte und Ein Kreis oder zwei Kreise und Ein Punkt oder

zwei gerade Linien und Ein Kreis oder zwei Kreiſe und Eine gerade Linie oder Ein Punkt Eine gerade Linie u. Ein Kreis oder drei Kreiſe. Die zwei erſten dieſer Aufg. werden im vierten Buche der Elemente gezeigt, die ich geſchrieben habe; denn wenn drei Punkte gegeben ſind, die nicht in einer geraden Linie liegen, ſo iſt dies keine andere Aufg. als die, um einen Triangel einen Kreis zu ziehen.

Sind aber drei gerade Linien gegeben, die nicht parallel laufen ſondern alle drei einander ſchneiden, ſo iſt es nichts anders, als in einem gegebenen Triangel einen Kreis zu beſchreiben. Der Fall alſo, wo zwei parallele Linien gegeben ſind, die von einer dritten durchſchnitten werden, ſteht hier als ein Theil der zweiten Unterabtheilung aller Aufgaben voran.

Nach der angeführten Ordnung werden die ſechs Aufg. im erſten Buche abgehandelt; im zweiten aber blos die beiden, wo zwei gerade Linien und Ein Kreis und wo drei Kreiſe gegeben ſind, weil mehrere wechſelſeitige Lagen der Kreiſe und geraden Linien Statt finden, und alſo mehrere Unterabtheilungen nöthig ſind.

Es giebt eine mit den angeführten Problemen von den Berührungen verwandte Anzahl von Aufg., welche von Einigen, die dieſe Probleme aufgaben, übergangen wurden; andere aber gaben ſie eher aufzulöſen als die zwei genannten Bücher; denn ſie

war leicht und mehr eine Einleitung in die Gattung der Aufg. von den Berührungen, indem sie dieselben zugleich ergänzte und vollständig machte.

Ich will wieder Alles in folgende einzige Aufg. zusammenfassen, in welcher zwar nicht so viel gegeben aber mehr verlangt wird: wenn irgend zwei Punkte, gerade Linien oder Kreise gegeben sind, einen der Größe nach gegebenen Kreis zu beschreiben, der durch einen oder beide gegebene Punkte, wenn deren gegeben sind, hindurchgeht, und die gegebenen Linien oder Kreise berührt. Die Anzahl der Aufg., welche dieses Problem enthält, ist sechs. Denn aus drei verschiedenen Dingen, entstehen sechs verschiedene ungeordnete Dyaden, weil entweder zwei Punkte gegeben oder zwei gerade Linien oder zwei Kreise oder Ein Punkt und Eine gerade Linie, oder Ein Punkt und Ein Kreis oder Eine gerade Linie und Ein Kreis gegeben sind, wo dann der seiner Größe nach gegebene Kreis, wie gesagt, beschrieben werden muß.

Dieses Problem muß nach den verschiedenen Fällen aufgelöst, zusammengestellt und unterschieden werden.

Das erste Buch von den Berührungen enthält sechs, das zweite vier Aufg. Die zwei Bücher haben ein und zwanzig Hülfssätze. Der Aufg. sind sechzig.

Des Pappus von Alexandrien

Hülfssätze

zu den Büchern von den Berührungen.

Zur fünften Aufgabe.

Es seien die parallelen Linien $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ (Fig. 2) gegeben, welche den Kreis $\alpha\delta$ in den Punkten α, δ berühren, so ist die Linie $\alpha\zeta$, durch die man die Punkte α, ζ verbindet, der Durchmesser des Kreises $\alpha\zeta$.

Man nehme in der Peripherie des Kreises die Punkte α, ϑ und verbinde sie durch die Linien $\alpha\eta$, $\eta\zeta$, $\alpha\vartheta$, $\vartheta\zeta$. Da nun die Linie $\alpha\alpha$ den Kreis berührt, und $\alpha\zeta$ ihn schneidet, so ist der Winkel $\alpha\eta\zeta$ dem Winkel $\alpha\vartheta\zeta$ im entgegengesetzten Abschnitt gleich. Eben deswegen ist der Winkel $\vartheta\zeta\alpha$ dem Winkel $\alpha\eta\zeta$ im entgegengesetzten Abschnitt gleich. Es ist aber auch der Winkel $\alpha\vartheta\zeta$ dem Winkel $\alpha\eta\zeta$ gleich. Sie sind aber zusammengenommen zwei Rechten gleich; also ist jeder von ihnen ein Rechter. Also sind $\alpha\vartheta\zeta$ und $\alpha\eta\zeta$ Halbkreise; also ist die Linie $\alpha\zeta$ der Durchmesser des Kreises $\alpha\zeta$, was zu beweisen war.

2. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 2) gegeben, den e Linien $\beta\delta$, $\delta\alpha$ berühren, und der Winkel δ werde n der geraden Linie $\gamma\delta$ in zwei gleiche Theile ge- eilt, so liegt der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta\gamma$ in r verlängerten Linie $\gamma\delta$.

Man ziehe die Linien $\gamma\alpha$, $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$, $\beta\varepsilon$. Da nun den Kreis berührt, $\gamma\delta$ aber ihn schneidet, so ist $\delta\varepsilon = \delta\alpha^2$. Es ist aber auch der Winkel $\delta\alpha\varepsilon$ m Winkel $\alpha\gamma\delta$ gleich; aus demselben Grunde ist r Winkel $\delta\beta\varepsilon$ dem Winkel $\beta\gamma\delta$ gleich. Aber es ist ch der Winkel $\beta\gamma\delta$ dem Winkel $\alpha\gamma\delta$, gleich. Der inkel $\delta\alpha\varepsilon$ ist aber auch dem Winkel $\delta\beta\varepsilon$ gleich; also jeder von ihnen ein Rechter; also ist die Linie $\gamma\varepsilon$ r Durchmesser des Kreises $\alpha\beta\gamma$. Also liegt der ittelp. des Kreises $\alpha\beta\gamma$ in der Verlängerung von $\gamma\delta$.

Zur zwölften Aufgabe.

3. Es seien zwei Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 3), die ander im Punkte β berühren, und man ziehe die L. $\gamma\varepsilon$, in welcher der Mittelp. des Kreises $\alpha\beta$ liege, so uß auch der Mittelp. des Kr. $\beta\gamma$ in der L. $\alpha\beta\gamma$ liegen.

Man ziehe die Linie $\delta\beta\varepsilon$, welche beide Kreise be- hrt, so ist der Winkel $\alpha\beta\delta$ ein Rechter; also auch n Nebenwinkel $\delta\beta\gamma$. Die Linie $\delta\varepsilon$ berührt aber den eis $\beta\gamma$, also liegt der Mittelp des Kreises $\beta\gamma$ und r Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$ in der Linie $\beta\gamma$.

4. **Umgekehrt:** wenn wieder die Linie $\alpha\beta$, $\beta\gamma$

(Fig. 3) die Durchmesser des Kreises sind, so berühren sich die Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$.

Man ziehe wieder die Tangente $\delta\varepsilon$ des Kreises $\alpha\beta$, so ist der Winkel $\alpha\beta\delta$ ein Rechter, und sein Nebenwinkel $\delta\beta\gamma$ ist auch ein Rechter. Es liegt aber in jeder Linie der Mittelp. der Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$; die Linie $\delta\varepsilon$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$; sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ in demselben Punkte β; der Kreis $\alpha\beta$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Dies wird an derselben Figur gezeigt.

5. Zwei Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 4) mögen einander im Punkte β berühren; nun ziehe man die Linie $\alpha\gamma\beta$, daß der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$ in ihr liegt, so muß auch der Mittelpunkt $\beta\gamma$ in ihr liegen.

Man ziehe die Tangente $\delta\varepsilon$ dieser Kreise. Da nun die Linie $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta$ berührt, und $\alpha\beta$ durch den Mittelpunkt geht, so ist der Winkel $\delta\beta\gamma$ ein Rechter. Sie wurde aber auch im Berührungspunkte β auf die Linie $\beta\gamma$ gezogen; der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ liegt also in der Linie $\beta\gamma$. Man kann es aber auch so beweisen:

Man ziehe die Linie $\beta\zeta$ und verbinde die Punkte γ, ζ, α, η, so muß der Winkel $\alpha\beta\gamma$ beiden Winkeln $\beta\zeta\gamma$ und $\alpha\eta\beta$ gleich sein. Nun ist der Winkel $\alpha\eta\beta$ ein Rechter, also ist auch der Winkel $\beta\zeta\gamma$ ein Rechter; also geht die Linie $\beta\gamma$ durch den Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$. Wäre der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ in

der Linie $\alpha\beta$ gegeben, so würden wir beweisen, daß auch der Mittelp. des Kreises $\alpha\beta$ darin läge.

6. Umgekehrt: wenn $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 4) die Durchmesser sind, so berühren sich die Kreise.

Man ziehe die Tangente $\delta\beta\varepsilon$ des Kreises $\alpha\beta$, so ist der Winkel $\alpha\beta\varepsilon$ ein Rechter; $\beta\gamma$ ist aber der Durchmesser, also berührt die Linie $\delta\varepsilon$ den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ im Punkte β; der Kreis $\alpha\beta$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Es kann auch so bewiesen werden: wenn $\gamma\zeta$ bis δ verlängert wird, so ist $\delta\zeta \cdot \delta\gamma = \delta\beta^2$, weil der Winkel bei ζ ein Rechter ist, so wie der bei β; $\delta\varepsilon$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$; sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ in demselben Punkte β. Der Kreis $\alpha\beta$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Dies gehört zu derselben Figur.

Zur sechszehnten Aufgabe.

7. Zwei Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\varepsilon$ (Fig. 5) berühren sich im Punkte β; man zieht nun durch β die Linien $\gamma\beta\delta$, $\alpha\beta\varepsilon$ und verbinde $\alpha\gamma$, $\delta\varepsilon$; so ist $\alpha\gamma$ parallel zu $\delta\varepsilon$.

Man ziehe die Linie $\zeta\eta$, welche beide Kreise im Punkte β berührt. Da nun $\beta\zeta$ den Kreis berührt, $\beta\alpha$ aber schneidet, so ist der Winkel $\alpha\beta\zeta$ dem Winkel $\alpha\gamma\beta$ gleich.

Aus demselben Grunde ist der Winkel $\eta\beta\varepsilon$ dem Winkel $\varepsilon\delta\beta$ gleich. Also ist auch der Winkel $\alpha\beta\gamma$ dem

Winkel $\delta\beta$ gleich. Da es nun Wechselwinkel sind, so ist $\alpha\gamma$ parallel zu $\delta\varepsilon$. Was zu beweisen war.

8. Man ziehe im Kreise $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 6) die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ $\gamma\alpha$ und aus α irgend eine gerade Linie $\alpha\varepsilon$, so daß der Winkel $\alpha\beta\gamma$ dem Winkel $\varepsilon\alpha\gamma$ gleich ist, so berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta\gamma$ im Punkte α.

Ist $\alpha\gamma$ der Durchmesser, so ist es offenbar; denn alsdann ist der Winkel $\varepsilon\alpha\gamma$ ein Rechter, weil der Winkel bei β ein Rechter ist. Dies mußte aber vorher gezeigt werden.

Ist $\alpha\gamma$ nicht der Durchm., so sei ζ der Durchm.; man ziehe $\alpha\zeta$, verlängere sie bis η und ziehe $\beta\eta$; alsdann ist der Winkel $\alpha\beta\eta$ ein Rechter. Da nun der W. $\varepsilon\alpha\gamma$ dem Winkel $\alpha\beta\varepsilon$ gleich ist, u. $\eta\alpha\gamma$ dem Winkel $\eta\beta\gamma$ über demselben Abschnitte, so ist der ganze Winkel $\varepsilon\alpha\eta$ dem Winkel $\alpha\beta\eta$ gleich. $\alpha\beta\eta$ ist aber ein Rechter, also ist auch $\varepsilon\alpha\eta$ ein Rechter. Da nun $\alpha\zeta$ ein Halbmesser ist, so berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta\gamma$. Dies war vorher zu beweisen.

9. Da dies sich so verhält, soll das Gegentheil des Satzes von dem vorhergehenden gezeigt werden. Wenn nämlich $\alpha\gamma$ parallel ist zu $\delta\varepsilon$ (Fig 5), so muß gezeigt werden, daß die Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\beta$ sich im Punkte β berühren.

Man ziehe wieder die Tangente $\zeta\eta$ des Kreises $\alpha\beta\gamma$, so ist der Winkel $\alpha\beta\zeta$ dem Winkel γ gleich; aber $\alpha\beta\zeta$ ist auch $\varepsilon\beta\eta$ gleich; γ ist also dem Wechselwinkel δ gleich.

δ gleich. Der Winkel αβε ist ferner dem Winkel δ gleich. Des Vorhergehenden wegen berührt also die Linie ζε den Kreis δβε. Sie berührt aber auch den Kreis αβγ in β. Der Kreis αβγ berührt also den Kreis δβε im Punkte β.

Zu derselben Aufgabe.

10. Wenn Ein Kreis (Fig. 7) der Lage nach gegeben ist und zwei Punkte δ, ε, und von den Punkten δ, ε aus die Linien δβ, εβ gegeben sind und verlängert werden, die Linie αγ der Linie δε parallel zu machen.

Es sei schon geschehen, und man ziehe die Tangente ζα. Da nun αγ parallel ist δε, so ist der Winkel γ dem Winkel γδε gleich. Aber γ ist gleich ζαε, denn ζα berührt, αε aber schneidet. Der Winkel ζαε ist also auch dem Winkel γδε gleich. Die Punkte α, β, δ, ζ liegen also in einem Kreise; also ist εβ . εα gleich εδ . εζ; εβ . εα ist aber gegeben; denn es ist der Tangente von ε aus gleich; also ist auch εδ . εζ gegeben. Die Linie δε ist aber gegeben; also ist auch εζ gegeben. Sie ist aber auch der Lage nach gegeben, denn ε ist gegeben, also auch ζ. Von dem Punkte ζ wird nun die Tangente ζα des der Lage nach gegebenen Kreises αβγ gezogen; ζα ist also der Lage und Größe nach gegeben. Es ist aber ζ gegeben, also auch α. Es ist aber auch ε gegeben; also auch αε

der Lage nach. Es ist aber auch der Kreis der Lage nach gegeben, also auch der Punkt β. Es sind aber auch die beiden Punkte δ, ε gegeben; also sind auch die beiden Linien δβ, βε der Lage nach gegeben. Die Aufgabe wird also auf folgende Art gestellt: Es seien ein Kreis αβγ und die Punkte δ, ε gegeben; nun mache man δε . εζ gleich dem Quadrate einer Tangente von ε aus; vom Punkte ζ aus ziehe man alsdann die Tangente ζα des Kreises αβγ und verbinde αε; hierauf ziehe man auch δβ und verlängere sie bis γ, und ziehe αγ, so behaupte ich, daß αγ parallel ist mit δε; denn da εδ . εζ dem Quadrate der Tangente aus ε, und εβ . εα auch dem Quadrate der Tangente aus ε gleich ist, so ist εβ . εα gleich εδ . εζ; der Winkel ζαε ist also dem Winkel βδε gleich. Aber der Winkel ζαε ist auch dem Winkel αγβ im entgegengesetzten Abschnitte gleich; der W. αγβ ist also dem βδε gleich. Es sind aber Wechselwinkel; αγ ist also parallel δζ.

Zur siebenzehnten Aufgabe.

11. Zwei Kreise αβγ, αεδ (Fig. 8) mögen einander im Punkte α berühren. Man ziehe nun vom Punkte α die geraden Linien αδβ, αεγ, und verbinde die Punkte δε, βγ, so ist δε parallel βγ.

Man ziehe von α die Tang. ζα, so ist der W. ζαβ einem jeden der W. αγβ, αεδ gleich; also ist der W. αγβ dem W. αεδ gleich, also ist δε parallel βγ. Es sei

aber δε parallel βγ, so berühren sich die Kreise αβγ, αδε. Denn man ziehe die Tangente ζε des Kreises αβγ, so ist der Winkel ζαδ dem Winkel γ gleich, aber der W. γ ist dem W. ε gleich; also ist der W. ζαδ dem W. ε gleich, also berührt die Linie ζε den Kreis αδε. Dies mußte vorher gezeigt werden.

Zu derselben Aufgabe.

12. Wenn ein Kreis αβγ (Fig. 9) und zwei Punkte δ, ε gegeben sind, die gegebenen Linien δα, εα zu errichten und βγ parallel δε zu machen. Es sei geschehen, und aus dem Punkte β ziehe man die Tangente βζ; da nun βζ den Kreis berührt, und βγ ihn schneidet, so ist der Winkel ζβγ, d. i. der Winkel δζβ dem Winkel α gleich. Die Punkte α, β, ε, ζ liegen also in einem Kreise. δβ . δα ist also gleich δζ . δε; δβ . δα ist aber gegeben; denn es ist dem Quadrate der Tangente von δ aus gleich; also ist auch δζ . δε gegeben; δε ist aber auch gegeben, also ist auch δζ gegeben. Sie ist aber auch der Lage nach gegeben; denn δ ist gegeben also auch ζ. Nun wird von dem gegebenen Punkte ζ aus die Tangente ζβ nach dem der Lage nach gegebenen Kreise gezogen; also ist auch ζβ der Lage nach gegeben. Es ist aber auch der Kreis αβγ der Lage nach gegeben; also ist der Punkt β gegeben. Es ist aber auch δ gegeben, also ist βδ der Lage nach gegeben. Es ist aber auch

zwei gerade Linien und Ein Kreis oder zwei Kreise und Eine gerade Linie oder Ein Punkt Eine gerade Linie u. Ein Kreis oder drei Kreise. Die zwei ersten dieser Aufg. werden im vierten Buche der Elemente gezeigt, die ich geschrieben habe; denn wenn drei Punkte gegeben sind, die nicht in einer geraden Linie liegen, so ist dies keine andere Aufg. als die, um einen Triangel einen Kreis zu ziehen.

Sind aber drei gerade Linien gegeben, die nicht parallel laufen sondern alle drei einander schneiden, so ist es nichts anders, als in einem gegebenen Triangel einen Kreis zu beschreiben. Der Fall also, wo zwei parallele Linien gegeben sind, die von einer dritten durchschnitten werden, steht hier als ein Theil der zweiten Unterabtheilung aller Aufgaben voran.

Nach der angeführten Ordnung werden die sechs Aufg. im ersten Buche abgehandelt; im zweiten aber blos die beiden, wo zwei gerade Linien und Ein Kreis und wo drei Kreise gegeben sind, weil mehrere wechselseitige Lagen der Kreise und geraden Linien Statt finden, und also mehrere Unterabtheilungen nöthig sind.

Es giebt eine mit den angeführten Problemen von den Berührungen verwandte Anzahl von Aufg., welche von Einigen, die diese Probleme aufgaben, übergangen wurden; andere aber gaben sie eher aufzulösen als die zwei genannten Bücher; denn sie

war leicht und mehr eine Einleitung in die Gattung der Aufg. von den Berührungen, indem sie dieselben zugleich ergänzte und vollständig machte.

Ich will wieder Alles in folgende einzige Aufg. zusammenfassen, in welcher zwar nicht so viel gegeben aber mehr verlangt wird: wenn irgend zwei Punkte, gerade Linien oder Kreise gegeben sind, einen der Größe nach gegebenen Kreis zu beschreiben, der durch einen oder beide gegebene Punkte, wenn deren gegeben sind, hindurchgeht, und die gegebenen Linien oder Kreise berührt. Die Anzahl der Aufg., welche dieses Problem enthält, ist sechs. Denn aus drei verschiedenen Dingen, entstehen sechs verschiedene ungeordnete Dyaden, weil entweder zwei Punkte gegeben oder zwei gerade Linien oder zwei Kreise oder Ein Punkt und Eine gerade Linie, oder Ein Punkt und Ein Kreis oder Eine gerade Linie und Ein Kreis gegeben sind, wo dann der seiner Größe nach gegebene Kreis, wie gesagt, beschrieben werden muß.

Dieses Problem muß nach den verschiedenen Fällen aufgelöst, zusammengestellt und unterschieden werden.

Das erste Buch von den Berührungen enthält sechs, das zweite vier Aufg. Die zwei Bücher haben ein und zwanzig Hülfssätze. Der Aufg. sind sechzig.

Des Pappus von Alexandrien

Hülfssätze

zu den Büchern von den Berührungen.

Zur fünften Aufgabe.

Es seien die parallelen Linien αβ, ηδ (Fig. 1) gegeben, welche den Kreis εζ in den Punkten ε, ζ berühre, so ist die Linie εζ, durch die man die Punkte ε, ζ verbindet, der Durchmesser des Kreises εζ.

Man nehme in der Peripherie des Kreises die Punkte ε, θ und verbinde sie durch die Linien εη, ηζ, εθ, θζ. Da nun die Linie αβ den Kreis berührt, und εζ ihn schneidet, so ist der Winkel ηεζ dem Winkel εθζ im entgegengesetzten Abschnitt gleich. Eben deswegen ist der Winkel θζε dem Winkel εηζ im entgegengesetzten Abschnitt gleich. Es ist aber auch der Winkel εθζ dem Winkel εηζ gleich. Sie sind aber zusammengenommen zwei Rechten gleich; also ist jeder von ihnen ein Rechter. Also sind εθζ und εηζ Halbkreise; also ist die Linie εζ der Durchmesser des Kreises εζ, was zu beweisen war.

2. Es sei der Kreis $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 2) gegeben, den die Linien $\beta\delta$, $\delta\alpha$ berühren, und der Winkel δ werde von der geraden Linie $\gamma\delta$ in zwei gleiche Theile getheilt, so liegt der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta\gamma$ in der verlängerten Linie $\gamma\delta$.

Man ziehe die Linien $\gamma\alpha$, $\alpha\varepsilon$, $\gamma\beta$, $\beta\varepsilon$. Da nun $\alpha\delta$ den Kreis berührt, $\gamma\delta$ aber ihn schneidet, so ist $\gamma\delta \cdot \delta\varepsilon = \delta\alpha^2$. Es ist aber auch der Winkel $\delta\alpha\varepsilon$ dem Winkel $\alpha\gamma\delta$ gleich; aus demselben Grunde ist der Winkel $\delta\beta\varepsilon$ dem Winkel $\beta\gamma\delta$ gleich. Aber es ist auch der Winkel $\beta\gamma\delta$ dem Winkel $\alpha\gamma\delta$ gleich. Der Winkel $\delta\alpha\varepsilon$ ist aber auch dem Winkel $\delta\beta\varepsilon$ gleich; also ist jeder von ihnen ein Rechter; also ist die Linie $\gamma\varepsilon$ der Durchmesser des Kreises $\alpha\beta\gamma$. Also liegt der Mittelp. des Kreises $\alpha\beta\gamma$ in der Verlängerung von $\gamma\delta$.

Zur zwölften Aufgabe.

3. Es seien zwei Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 3), die einander im Punkte β berühren, und man ziehe die L. $\alpha\beta\gamma$, in welcher der Mittelp. des Kreises $\alpha\beta$ liege, so muß auch der Mittelp. des Kr. $\beta\gamma$ in der L. $\alpha\beta\gamma$ liegen.

Man ziehe die Linie $\delta\beta\varepsilon$, welche beide Kreise berührt, so ist der Winkel $\alpha\beta\delta$ ein Rechter; also auch sein Nebenwinkel $\delta\beta\gamma$. Die Linie $\delta\varepsilon$ berührt aber den Kreis $\beta\gamma$, also liegt der Mittelp des Kreises $\beta\gamma$ und der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$ in der Linie $\beta\gamma$.

4. Umgekehrt: wenn wieder die Linie $\alpha\beta$, $\beta\gamma$

(Fig. 5) die Durchmesser des Kreises sind, so berühren sich die Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$.

Man ziehe wieder die Tangente $\delta\varepsilon$ des Kreises $\alpha\beta$, so ist der Winkel $\alpha\beta\delta$ ein Rechter, und sein Nebenwinkel $\delta\beta\gamma$ ist auch ein Rechter. Es liegt aber in jeder Linie der Mittelp. der Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$; die Linie $\delta\varepsilon$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$; sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ in demselben Punkte β; der Kreis $\alpha\beta$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Dies wird an derselben Figur gezeigt.

5. Zwei Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 4) mögen einander im Punkte β berühren; nun ziehe man die Linie $\alpha\gamma\beta$, daß der Mittelpunkt des Kreises $\alpha\beta$ in ihr liegt, so muß auch der Mittelpunkt $\beta\gamma$ in ihr liegen.

Man ziehe die Tangente $\delta\varepsilon$ dieser Kreise. Da nun die Linie $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta$ berührt, und $\alpha\beta$ durch den Mittelpunkt geht, so ist der Winkel $\delta\beta\gamma$ ein Rechter. Sie wurde aber auch im Berührungspunkte β auf die Linie $\beta\gamma$ gezogen; der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ liegt also in der Linie $\beta\gamma$. Man kann es aber auch so beweisen:

Man ziehe die Linie $\beta\zeta$ und verbinde die Punkte γ, ζ, α, η, so muß der Winkel $\alpha\beta\gamma$ beiden Winkeln $\beta\zeta\gamma$ und $\alpha\eta\beta$ gleich sein. Nun ist der Winkel $\alpha\eta\beta$ ein Rechter, also ist auch der Winkel $\beta\zeta\gamma$ ein Rechter; also geht die Linie $\beta\gamma$ durch den Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$. Wäre der Mittelpunkt des Kreises $\beta\gamma$ in

der Linie $\alpha\beta$ gegeben, so würden wir beweisen, daß auch der Mittelp. des Kreises $\alpha\beta$ darin läge.

6. Umgekehrt: wenn $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 4) die Durchmesser sind, so berühren sich die Kreise.

Man ziehe die Tangente $\delta\beta\varepsilon$ des Kreises $\alpha\beta$, so ist der Winkel $\alpha\beta\varepsilon$ ein Rechter; $\beta\gamma$ ist aber der Durchmesser, also berührt die Linie $\delta\varepsilon$ den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ im Punkte β; der Kreis $\alpha\beta$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Es kann auch so bewiesen werden: wenn $\gamma\zeta$ bis δ verlängert wird, so ist $\delta\zeta \cdot \delta\gamma = \delta\beta^2$, weil der Winkel bei ζ ein Rechter ist, so wie der bei β; $\delta\varepsilon$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$; sie berührt aber auch den Kreis $\alpha\beta$ in demselben Punkte β. Der Kreis $\alpha\beta$ berührt also den Kreis $\beta\gamma$ im Punkte β. Dies gehört zu derselben Figur.

Zur sechszehnten Aufgabe.

7. Zwei Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\beta\varepsilon$ (Fig. 5) berühren sich im Punkte β; man zieht nun durch β die Linien $\gamma\beta\delta$, $\alpha\beta\varepsilon$ und verbinde $\alpha\gamma$, $\delta\varepsilon$; so ist $\alpha\gamma$ parallel zu $\delta\varepsilon$.

Man ziehe die Linie $\zeta\eta$, welche beide Kreise im Punkte β berührt. Da nun $\beta\zeta$ den Kreis berührt, $\beta\alpha$ aber schneidet, so ist der Winkel $\alpha\beta\zeta$ dem Winkel $\alpha\gamma\beta$ gleich.

Aus demselben Grunde ist der Winkel $\eta\beta\varepsilon$ dem Winkel $\delta\beta\varepsilon$ gleich. Also ist auch der Winkel $\alpha\beta\gamma$ dem

Winkel $\varepsilon\delta\beta$ gleich. Da es nun Wechselwinkel sind, so ist $\alpha\gamma$ parallel zu $\delta\varepsilon$. Was zu beweisen war.

8. Man ziehe im Kreise $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 6) die Linien $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ und aus α irgend eine gerade Linie $\alpha\varepsilon$, so daß der Winkel $\alpha\beta\gamma$ dem Winkel $\varepsilon\alpha\gamma$ gleich ist, so berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta\gamma$ im Punkte α.

Ist $\alpha\gamma$ der Durchmesser, so ist es offenbar; denn alsdann ist der Winkel $\varepsilon\alpha\gamma$ ein Rechter, weil der Winkel bei β ein Rechter ist. Dies mußte aber vorher gezeigt werden.

Ist $\alpha\gamma$ nicht der Durchm., so sei ζ der Durchm.; man ziehe $\alpha\zeta$, verlängere sie bis η und ziehe $\beta\eta$; alsdann ist der Winkel $\alpha\beta\eta$ ein Rechter. Da nun der W. $\varepsilon\alpha\gamma$ dem Winkel $\alpha\beta\varepsilon$ gleich ist, u. $\eta\alpha\gamma$ dem Winkel $\eta\beta\gamma$ über demselben Abschnitte, so ist der ganze Winkel $\varepsilon\alpha\eta$ dem Winkel $\alpha\beta\eta$ gleich. $\alpha\beta\eta$ ist aber ein Rechter, also ist auch $\varepsilon\alpha\eta$ ein Rechter. Da nun $\alpha\zeta$ ein Halbmesser ist, so berührt $\delta\varepsilon$ den Kreis $\alpha\beta\gamma$. Dies war vorher zu beweisen.

9. Da dies sich so verhält, soll das Gegentheil des Satzes von dem vorhergehenden gezeigt werden. Wenn nämlich $\alpha\gamma$ parallel ist zu $\delta\varepsilon$ (Fig 5), so muß gezeigt werden, daß die Kreise $\alpha\beta\gamma$, $\delta\varepsilon\beta$ sich im Punkte β berühren.

Man ziehe wieder die Tangente $\zeta\eta$ des Kreises $\alpha\beta\gamma$, so ist der Winkel $\alpha\beta\zeta$ dem Winkel γ gleich; aber $\alpha\beta\zeta$ ist auch $\varepsilon\beta\eta$ gleich; γ ist also dem Wechselwinkel

δ gleich.

δ gleich. Der Winkel αβε ist ferner dem Winkel δ gleich. Des Vorhergehenden wegen berührt also die Linie ζα den Kreis δβε. Sie berührt aber auch den Kreis αβγ in β. Der Kreis αβγ berührt also den Kreis δβε im Punkte β.

Zu derselben Aufgabe.

10. Wenn Ein Kreis (Fig. 7) der Lage nach gegeben ist und zwei Punkte δ, ε, und von den Punkten δ, ε aus die Linien δβ, εβ gegeben sind und verlängert werden, die Linie αγ der Linie δε parallel zu machen.

Es sei schon geschehen, und man ziehe die Tangente ζα. Da nun αγ parallel ist δε, so ist der Winkel γ dem Winkel γδε gleich. Aber γ ist gleich ζαε, denn ζα berührt, αε aber schneidet. Der Winkel ζαε ist also auch dem Winkel γδε gleich. Die Punkte α, β, δ, ζ liegen also in einem Kreise; also ist εβ . εα gleich εδ . εζ; εβ . εα ist aber gegeben; denn es ist der Tangente von ε aus gleich; also ist auch εδ . εζ gegeben. Die Linie δε ist aber gegeben; also ist auch εζ gegeben. Sie ist aber auch der Lage nach gegeben, denn ε ist gegeben, also auch ζ. Von dem Punkte ζ wird nun die Tangente ζα des der Lage nach gegebenen Kreises αβγ gezogen; ζα ist also der Lage und Größe nach gegeben. Es ist aber ζ gegeben, also auch α. Es ist aber auch ε gegeben; also auch αε

der Lage nach. Es ist aber auch der Kreis der Lage nach gegeben, also auch der Punkt β. Es sind aber auch die beiden Punkte δ, ε gegeben; also sind auch die beiden Linien δβ, βε der Lage nach gegeben. Die Aufgabe wird also auf folgende Art gestellt: Es seien ein Kreis αβγ und die Punkte δ, ε gegeben; nun mache man δε . εζ gleich dem Quadrate einer Tangente von ε aus; vom Punkte ζ auch ziehe man alsdann die Tangente ζα des Kreises αβγ und verbinde αε; hierauf ziehe man auch δβ und verlängere sie bis γ, und ziehe αγ, so behaupte ich, daß αγ parallel ist mit δε; denn da αδ . αζ dem Quadrate der Tangente aus ε, und εβ . εα auch dem Quadrate der Tangente aus ε gleich ist, so ist αβ . αα gleich αδ . αζ; den Winkel ζαε ist also dem Winkel βδε gleich. Aber der Winkel ζαε ist auch dem Winkel αγβ im entgegengesetzten Abschnitte gleich; der W. αγβ ist also dem βδε gleich. Es sind aber Wechselwinkel; αγ ist also parallel δζ.

Zur siebenzehnten Aufgabe.

11. Zwei Kreise αβγ, αεδ (Fig. 8) mögen einander im Punkte α berühren. Man ziehe nun vom Punkte α die geraden Linien αδβ, αεγ, und verbinde die Punkte δε, βγ, so ist δε parallel βγ.

Man ziehe von α die Tang. ζη, so ist der W. ζαβ einem jeden der W. αγβ, αεδ gleich; also ist der W. αγβ dem W. αεδ gleich, also ist δε parallel βγ. Es si

aber δε parallel βγ, so berühren sich die Kreise αβγ, κδε. Denn man ziehe die Tangente ζκ des Kreises αβγ, so ist der Winkel ζαδ dem Winkel γ gleich, aber der W. γ ist dem W. ε gleich; also ist der W. ζαδ dem W. ε gleich, also berührt die Linie ζκ den Kreis αδε. Dies mußte vorher gezeigt werden.

Zu derselben Aufgabe.

12. Wenn ein Kreis αβγ (Fig. 9) und zwei Punkte δ, ε gegeben sind, die gegebenen Linien δα, εα zu errichten und βγ parallel δε zu machen. Es sei geschehen, und aus dem Punkte β ziehe man die Tangente βζ; da nun βζ den Kreis berührt, und βγ ihn schneidet, so ist der Winkel ζβγ, d. i. der Winkel ζβ dem Winkel α gleich. Die Punkte α, β, ε, ζ liegen also in einem Kreise. δβ . δα ist also gleich δζ . δε; δβ . δα ist aber gegeben; denn es ist dem Quadrate der Tangente von δ aus gleich; also ist auch δζ . δε gegeben; δε ist aber auch gegeben, also ist auch δζ gegeben. Sie ist aber auch der Lage nach gegeben; denn δ ist gegeben also auch ζ. Nun wird von dem gegebenen Punkte ζ aus die Tangente ζβ nach dem der Lage nach gegebenen Kreise gezogen; also ist auch ζβ der Lage nach gegeben. Es ist aber auch der Kreis αβγ der Lage nach gegeben; also ist der Punkt β gegeben. Es ist aber auch δ gegeben, also ist βδ der Lage nach gegeben. Es ist aber auch

der Kreis der Lage nach gegeben; also ist α gegeben. Es ist aber auch ε gegeben; also ist auch δα, αε der Lage nach gegeben. Die Aufgabe muß also auf folgende Art gestellt werden. Es ist ein Kreis αβγ nebst zwei Punkten δ, ε gegeben. Nun mache man δζ . δε dem Quadrate der Tangente aus δ gleich; ziehe vom Punkte ζ die Tangente ζβ nach dem Kreise αβγ, ziehe δβ, verlängere sie bis α und verbinde die Punkte αε, βγ; so behaupte ich, daß βγ parallel ist δε. Denn da δζ . δε dem Quadrate der Tangente gleich ist, so ist der Winkel α d. h. der Winkel γβζ dem Winkel βζδ gleich; es sind aber Wechselwinkel, also ist βγ parallel δε.

Zur achtzehnten Aufgabe.

13. Wenn ein Kreis αβγ (Fig. 10) und zwei Punkte δ, ε gegeben sind, von δ, ε aus die gegebene Figur δαε zu verzeichnen und δε parallel βγ zu machen.

Es sei geschehen, und man ziehe von β aus die Tangente βζ nach dem Kreise αβγ, so ist der Winkel ζβδ dem Winkel γ d. i. dem Winkel ε gleich; also liegen die Punkte β, ζ, α, ε, in der Peripherie eines Kreises; also ist δβ . δα gleich δζ . δε; es ist aber δβ . δα gegeben, denn die Linie αδβ wird vom gegebenen Punkte δ nach dem der Lage nach gegebenen Kreise gezogen; also ist auch δζ . δε gegeben. Es ist

aber δε gegeben; also ist auch δζ gegeben. Ferner ist δ gegeben, also auch ζ. Von dem Punkte ζ wird nun die Linie ζβ nach dem der Lage nach gegebenen Kreise gezogen; ζβ ist also der Lage nach gegeben. Aber auch der Kr. ist der Lage nach gegeb., also ist auch der P. β gegeben. Es ist aber auch ε gegeb.; also auch βε der Lage nach. Aber auch der Kreis seiner Lage nach, also ist auch der P. α gegeben. Es sind aber die beiden P. δ, ε gegeben; also sind auch die beiden L. δα, αε der Lage nach gegeben. Die Aufgabe wird also gestellt: Es sei ein Kreis αβγ der Lage nach gegeben nebst den beiden Punkten δ, ε. Nun ziehe man irgend eine Linie αδβ und mache δα . δβ gleich δε . δζ, d. h. man ziehe die Tangente βζ des Kreises αβγ und verbinde γα. Da nun der Winkel ζβδ gleich ist dem Winkel δεα, und der Winkel ζβδ dem Winkel γ, so ist der Winkel γ dem Winkel ε gleich; also ist die Linie βγ der Linie εδ parallel, was zu beweisen war.

Zur neunzehnten Aufgabe.

14. Wenn ein Kreis αβγ (Fig. 11) nebst zwei Punkten δ, ε gegeben ist, über den gegebenen Punkten δε zu errichten, so daß βγ parallel ist δε.

Es sei geschehen, und man ziehe die Tangente βζ, so liegen wieder die Punkte α, ζ, β, ε in einem Kreise und δα . δβ ist gleich δε . δζ. Es ist aber δα . δβ

gegeben, also auch $\delta\alpha$. $\delta\zeta$. Es ist aber auch $\delta\alpha$ gegeben, also auch $\delta\zeta$. Sie ist aber auch der Lage nach gegeben. Ferner ist der Punkt δ gegeben, also auch der Punkt ζ, also auch $\beta\zeta$ der Lage nach. Aber der Kreis ist auch gegeben, also auch der Punkt β. Aber auch die Punkte δ, ε; also auch die Linien $\delta\alpha$, $\varepsilon\alpha$. Man muß dies beweisen wie bei dem Vorhergehenden und bei der Zusammenstellung verfahren wie bei dem, was dem Vorhergehenden vorausgeht.

Zur vier und zwanzigsten Aufgabe.

25. Zwei Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 22) mögen einander im Punkte β berühren. Man nehme nun ihre Mittelpunkte δ, ε und ziehe die Linien $\alpha\delta$, $\delta\beta$, $\gamma\varepsilon$, $\varepsilon\beta$, so daß $\alpha\delta$ parallel ist $\gamma\varepsilon$, so sind die Linien $\delta\beta\varepsilon$, $\alpha\beta\gamma$ gerade Linien. Man ziehe die Tangente $\zeta\eta$ der Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$. Da nun die Linie $\delta\beta$ ein Halbm. ist, so ist der Winkel $\delta\beta\zeta$ ein Rechter; aus demselben Grunde ist $\zeta\beta\varepsilon$ ein rechter Winkel; also ist die Linie $\delta\beta\varepsilon$ gerade. Da aber $\alpha\delta$ gleich ist $\beta\delta$, und $\varepsilon\gamma$ gleich ist $\varepsilon\beta$, so ist $\alpha\delta$ zu $\delta\beta$ wie $\varepsilon\gamma$ zu $\varepsilon\beta$. Da nun die Seiten um die gleichen Winkel δ, ε in gleichem Verhältniß stehen, so ist der Winkel $\delta\beta\alpha$ dem Winkel $\gamma\beta\varepsilon$ gleich, und $\delta\beta\varepsilon$ ist eine gerade Linie, also ist auch die Linie durch die Punkte α, β, γ eine gerade Linie. Was zu beweisen war.

Zur fünf und zwanzigsten Aufgabe.

16. Wenn $\alpha\beta$ (Fig. 13) gleich ist der Linie
, aber $\alpha\delta$ der Linie $\delta\varepsilon$, und $\delta\varepsilon$ parallel ist $\beta\gamma$, so
l bewiesen werden, daß die Linie durch die Punkte
ε, γ eine gerade ist.

Man ziehe $\alpha\varepsilon$, $\varepsilon\gamma$, mache $\beta\zeta$ parallel $\alpha\varepsilon$ und
längere $\varepsilon\delta$ bis nach ζ, so ist $\delta\zeta$ gleich $\delta\beta$; es ist
er auch $\alpha\delta$ gleich $\delta\varepsilon$; also ist die ganze Linie $\alpha\beta$
e ganzen Linie $\zeta\varepsilon$ gleich. Es ist aber auch $\alpha\beta$ gleich
; also ist auch $\beta\gamma$ gleich $\zeta\varepsilon$, und sie ist ihr paral-
. Also ist $\alpha\varepsilon\gamma$ eine gerade Linie; denn das ist of-
ıbar.

Zur ein und dreißigsten Aufgabe.

17. Wenn ein Kreis $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 14) gegeben ist,
) man zwei gleiche Linien $\beta\delta$, $\delta\gamma$ zieht, und $\beta\delta$ be-
hrt ihn, so berührt ihn auch $\delta\gamma$.

Dies ist offenbar; denn wenn man $\delta\alpha$ zieht, so
$\delta\varepsilon . \delta\alpha$ gleich $\delta\beta^2$. Aber $\delta\beta^2$ ist gleich $\delta\gamma^2$, also
$\delta\varepsilon . \delta\alpha$ gleich $\delta\gamma^2$. Also berührt $\delta\gamma$ den Kreis $\alpha\beta\gamma$.

18. Wenn zwei Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ (Fig. 12) gege-
n sind, in denen man durch den P. β irgend eine
ie $\alpha\beta\gamma$ zieht, und die parallelen Linien $\alpha\delta$, $\varepsilon\gamma$ sind
e Halbmesser, so berühren sich die Kreise $\alpha\beta$, $\beta\gamma$
i Punkte β.

Man nehme die Mittelpunkte der Kreise δ, ε,

und ziehe δβ, βα, so ist die Linie δβα eine gerade Linie; denn αδ ist parallel γα, und es ist αδ zu δβ wie γα zu γβ. Daher haben wir zwei Triangel, wo Ein Winkel α des einen Triangels Einem Winkel γ des andern gleich ist, und die Seiten um zwei andere Winkel sind proportional; also sind die Triangel ähnlich; also ist der Winkel αβδ dem Winkel γβα gleich; αβγ ist aber eine gerade Linie, also auch δβα. Da nun die Linie durch die Mittelpunkte und den Berührungsp. eine gerade ist, so berühren sich die Kreise αβ, βγ im Punkte β, was zu beweisen war.

Zur zwei und funfzigsten Aufgabe.

19. Es sei αβ (Fig. 15) parallel γδ und αγ gleich βδ; ferner sei der Winkel αγδ stumpf und βδγ spitzig, so ist die Figur αδ ein Parallelogramm.

Da αγδ ein stumpfer Winkel ist, und βδγ ein spitzer, so fällt der Perpendikel aus α auf die Linie γδ außerhalb γ; der Perpendikel aus β auf die Linie γδ aber innerhalb δ. Man fälle sie, u. es mögen dies die Linien αε, βζ sein. Es ist nun αβ parallel γδ und die Winkel bei den Punkten ε, ζ sind rechte W.; also ist ζδ gleich εγ; also auch die ganze Linie εζ der ganzen Linie γδ. Also ist auch αβ gleich γδ.

20. Man nehme zwei gleiche Kreise αβ, δγ (Fig. 16), ziehe durch ihre Mittelp. die Linie αδ

und $\gamma\delta$ parallel $\varepsilon\zeta$, so behaupte ich, daß die Verlängerung von $\varepsilon\zeta$ den Kreis $\alpha\beta$ schneidet.

Man nehme die Mittelpunkte $\varkappa$, ϑ dieser Kreise; von den Punkten $\varkappa$, ϑ ziehe man die Perpendikel $\varkappa\vartheta$, $\varkappa\lambda$ und verbinde die Punkte $\varkappa\lambda$. Nun ist $\varkappa\vartheta$ gleich und parallel $\varkappa\lambda$, und $\varkappa\lambda$ ist gleich und parallel $\vartheta\vartheta$; also sind die Winkel bei $\varkappa$, λ rechte Winkel, und $\varkappa\vartheta$, $\varkappa\lambda$ sind Halbm.; also berührt $\varkappa\lambda$ die Kreise. Daher ist offenbar, daß, weil die Tangente von $\gamma\delta$ den Kreis $\alpha\beta$ berührt, auch die den Kreis $\gamma\delta$ schneidende Linie $\varepsilon\zeta$ den Kreis $\alpha\beta$ in ihrer Verlängerung schneidet.

21. Es sei $\delta\alpha$ gleich $\alpha\varepsilon$, $\beta\delta$ aber größer als $\gamma\varepsilon$, (Fig. 17) und man ziehe $\delta\varepsilon$, so muß die Verlängerung von $\delta\varepsilon$ mit $\beta\gamma$ zusammenfallen. Es sei $\delta\zeta$ gleich $\gamma\varepsilon$, und es werde $\gamma\zeta$ gezogen. Sie ist nun parallel $\delta\varepsilon$, und fällt mit $\beta\gamma$ zusammen, also fällt auch $\delta\varepsilon$ mit $\beta\gamma$ zusammen.

Zu derselben Aufgabe.

22. Wenn ein Kreis $\alpha\beta\gamma$ (Fig. 18) nebst drei Punkten δ, ε, ζ, die in einer geraden Linie liegen, gegeben ist, die gegebene Figur $\delta\alpha$ zu verzeichnen und $\beta\gamma$, $\gamma\zeta$ in eine gerade Linie zu bringen.

Es sei geschehen, und durch β ziehe man mit $\delta\zeta$ parallel die Linie $\beta\varkappa$, ziehe $\varkappa\gamma$ und verlängere sie bis ϑ, so ist der Winkel $\beta\varkappa\gamma$ d. i. der Winkel α dem Winkel $\gamma\vartheta\zeta$ gleich; also ist $\varkappa\gamma \cdot \varkappa\alpha$ gleich $\varkappa\vartheta \cdot \varkappa\delta$; $\varkappa\gamma \cdot \varkappa\alpha$

ist aber gegeben; denn es ist dem Qdr. der Tang. aus ε gl.; also ist auch ϑ.εδ gegeb. Nun ist aber εδ gegeb.; also auch ϑ. Sie ist aber der Lage nach gegeben, denn ε ist gegeben, also auch ϑ; ferner ist ζ gegeben. Man hat also über ϑζ die Figur ϑγζ zu errichten, und βα der Linie ϑζ parallel zu ziehen. Dies ist aber oben gelehrt worden (10. Hülfssatz); also ist auch γ gegeben. Es ist aber auch ε gegeben; also auch γα der Lage nach. Es ist aber auch der Kreis gegeben, also auch der Punkt α. Ferner ist der Punkt δ gegeben; also auch δα der Lage nach. Man stelle daher die Aufg. auf folgende Art: Es sei der Kreis αβγ nebst den in einer geraden Linie liegenden drei Punkten δ, ε, ζ gegeben, und dem Quadrate der Tangente sei gleich ϑ.εδ. Ueber den gegebenen Punkten ϑ, ζ errichte man ferner den Winkel ϑγζ, so daß βα parallel ϑζ sei, ziehe αγ sei und verlängere sie bis α, so behaupte ich, daß die Linie αβδ eine gerade Linie ist. Denn wenn αγ.εα und ϑ.εδ beide gleich sind dem Quadrate der Tangente aus ε, so ist αγ.εα gleich ϑ.εδ. Also liegen die Punkte δ, ϑ, γ, α in einem Kreise; und da der Winkel βαγ dem Winkel γϑζ gleich ist und auch dem Winkel βαγ im Kreise, so ist auch der Winkel βαγ dem Winkel γϑδ gleich; nun liegen die Punkte α, γ, δ, ϑ in einem Kreise, also ist die Linie αβδ eine gerade Linie.

Was noch übrig ist, wird mit seinen besonderen

Fällen auf die besondern Fälle der 10ten Aufg. zurückgeführt.

23. Wenn zwei Kreise $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ (Fig. 19) gegeben sind, und man zieht $\alpha\delta$ und macht $\varepsilon\eta$ zu $\eta\zeta$ wie der Halbm. des Kreises $\alpha\beta$ zum Halbm. des Kreises $\delta\gamma$, so schneidet eine von η aus gezogene Linie, welche den Kreis $\gamma\delta$ schneidet, auch den Kreis $\alpha\beta$.

Man nehme die Punkte ε, ζ, die Mittelp. der Kreise, ziehe von η die Tangente $\eta\vartheta$ des Kreises $\gamma\delta$, ziehe $\zeta\vartheta$ und dieser Linie parallel $\varepsilon\varkappa$. Da nun $\varepsilon\eta$ sich verhält zu $\eta\zeta$ wie $\varepsilon\varkappa$ zu $\zeta\vartheta$, so ist die durch die P. η, ϑ, $\varkappa$ gehende Linie eine gerade Linie. Nun ist der W. ϑ ein Rechter, also auch der bei $\varkappa$. Wenn daher die Linie aus η den Kreis $\gamma\delta$ berührt, so berührt sie auch, wenn sie verlängert wird, den Kreis $\alpha\beta$. Aber auch die Linien, welche den Kreis $\gamma\delta$ zwischen δ, ϑ schneiden, werden in ihrer Verläng. zwischen $\varkappa$, β treffen. Nun ist aber $\varepsilon\varkappa$ die Tangente; die Linien zwischen β, $\varkappa$, δ, ϑ schneidet also; also schneidet dieselbe Linie, von η ausgezogen, auch den Kreis $\alpha\beta$.

Das erste Buch von den Berührungen hat sieben Aufgaben, das zweite vier.

Auflösung

der

Aufgaben von den Berührungen.

Um die Aufg. einen Kreis zu beschreiben, der gegebene Punkte, Linien und Kreise berühre, zu lösen, so wollen wir zuerst die hier möglichen Combinationen der gegebenen Elemente aufstellen.

Bezeichnen wir die gegebenen Elemente Punkt, Linie, Kreis durch P, L, K, so ergiebt sich

I. Klasse.	Ein Element gegeben	P, L, K
II. Klasse.	Zwei Elemente	PP′, PL, PK
		LL′, LK
		KK′
III. Klasse.	Drei Elemente	PP′P″, PP′L, PPK
		PLL′, PLK
		PKK′
		LL′L″, LL′K
		LKK′
		KK′K″

Von mehr als drei gegebenen Elementen kann bei dieser Aufg. nicht die Rede sein, da vier und mehrere nur unter gewissen besonderen Bedingungen von dem gesuchten Kreise zugleich mit berührt worden.

Um mich kurz und doch bestimmt ausdrücken zu können, will ich künftig immer den gesuchten Berührungskreis mit K''' und die Mittelp. der Kreise K, K', K'' und K^{IV} mit m, m', m'' und m''', so wie die Halbm. mit r, r', r'' und r''' bezeichnen.

A. Die erste Klasse liefert also folgende drei Aufgaben:

I. Aufg. Wenn ein Punkt P gegeben ist.

Aufl. Jede durch P gelegte gerade Linie ist der geom. Ort von m'''.

II. Aufg. Wenn eine Linie L gegeben ist.

Aufl. Jede Linie, welche L rechtw. durchschneidet, ist der geom. Ort von m'''.

III. Aufg. Wenn ein Kreis K gegeben ist.

Aufl. Jede durch den Mittelp. K gezogene gerade Linie ist der geom. Ort von m'''.

Alle 3 Aufg. sind gänzlich unbestimmt, sowohl in Rücksicht der Größe als der Lage des Halbmessers r''' vom Kreise K'''.

B. Die zweite Klasse liefert folgende sechs Aufgaben:

I. Aufg. Wenn zwei Punkte P, P′ gegeben sind.

Aufl. Eine Linie, welche die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte in ihrer Mitte winkelrecht durchschneidet, ist der geom. Ort von m'''; r''' ist der Größe und Lage nach unbestimmt.

II. Aufg. Wenn ein Punkt P und eine Linie L gegeben ist.

Aufl. a) Wenn P in L liegt, so liegt m''' in einer durch P auf L winkelrecht gezogenen Linie, aber die Lage und Größe von r''' ist unbestimmt.

b) Liegt P außerhalb L, so liegt m''' in der Mitte des Perpend. von P auf L, und der halbe Perpend. ist r'''.

III. Aufg. Wenn ein Punkt P und ein Kreis K gegeben ist.

Aufl. a) Liegt P in der Peripherie von K, so ist die durch m und durch P gezogene gerade Linie der geom. Ort; also ist r''' der Größe und Lage nach unbestimmt.

b) Wenn P außerhalb oder innerhalb K liegt

liegt m''' in derj. Linie, die durch m und durch P
zogen wird.

Halbirt man die Linie zwischen P und K, so hat
an m''' und r'''. Weil es hier zwei verschiedene
ntfernungen zwischen P und K giebt, so giebt es
ch immer zwei versch. Kreise K'''.

IV. Aufg. Wenn zwei gerade Linien L,
' gegeben sind.

Aufl. a) Sind L, L' parallel, so ist eine von
und L' gleichweit entfernt liegende Parallele der
om. Ort von m''' und r''' ist gleich dem Abstande
ischen m''' und L; r''' ist also der Größe und
ge nach bestimmt, obgleich der Ort von m''' unbe-
mmt ist.

b) Sind L und L' convergirend, so ist die Linie,
elche den Winkel, den diese convergirenden L. mit
nander bilden, halbirt, der geom. Ort von m''', und
n Perpend. von m''' auf L oder L' gleich r'''.

Da der Ort m''' beliebig, so ist r''' der Größe
ach unbestimmt.

V. Aufg. Wenn eine Linie L und ein
reis K gegeben sind.

Aufl. a) Wenn L den Kreis K berührt, so ist
ie durch m und den Berührungsp. gezogene gerade
inie der geom. Ort von m''', und r''' gleich der

Entfernung des Punktes m''' vom Berührungsp. — Größe und Lage des Halbm. ist daher unbestimmt. Siehe Aufg. III, a.

b) Wenn L den Kreis K schneidet oder außerhalb K liegt, so ist m''' in der durch m auf L prpd. gezogenen Linie. Die Aufg. ist nun einerlei mit Aufg. III, b.

VI. Aufg. Wenn zwei Kreise K, K', gegeben sind.

Aufl. a) Wenn K, K' sich von außen oder von innen berühren, so ist die durch m, m' gezogene gerade Linie der geom. Ort von m''', und r''' der Größe und Lage nach unbestimmt, wie Aufg. III, a und V, a.

b) Wenn K, K' sich schneiden oder K ganz innerhalb oder ganz außerhalb K' liegt, so liegt m''' in der durch m und m' gezogenen L. Diese Linie giebt mit der Kreislinie K, K' 4 Durchschnittsp.; die Mitte der Entfernung je zwei dieser Punete, die zu verschiedenen Kreisen gehören, giebt ein m'''. Es giebt also hier 4 verschiedene r'''.

C. Die dritte Klasse liefert folgende zehn Aufgaben:

I. Aufg. Wenn drei nicht in gerader Linie liegende Punkte P, P', P'', gegeben sind.

Aufl. Steht in allen Anfangsgründen der Geometrie.

II. Aufg.

II. Aufg. Wenn zwei Punkte P, P′ und eine Linie L gegeben sind.

Aufl. a) Wenn P, P′ prll. mit A liegen. In Fig. 1 sei AB die gegebene L. PP′ wird also eine Sehne und AB eine Tangente von K‴. Der Berührungspunkt D ergiebt sich durch den Perpend. auf die Mitte C der Sehne PP′, und nun bestimmt man m‴ wie Aufg. I.

b) Wenn P in L und P′ außerhalb liegt (Fig. 2), so ist P der Berührungsp. der Tangente AB und PP′ der Sehne von K‴. Hieraus ergiebt sich die aus der Figur zu ersehende Constr.

c) Wenn P, P′ ganz außerhalb auf einerlei Seite von L und nicht prll mit L liegen.

Die Linien AB und PP′ (Fig. 3) verlängert schneiden sich in C. Es wird also PP′ eine Sehne und CA eine Tangente von K‴. Wäre D der Berührungspunkt, so ist

$$CP' : CD = CD : CP.$$

Ist auf solche Art CD bestimmt worden, so beschr. man durch die drei Punkte D, P, P′ einen Kreis K‴.

III. Aufg. Wenn zwei Punkte P, P′ und ein Kreis K gegeben sind.

Aufl. a) Wenn P in der Periph. von K und P′ außerhalb oder innerhalb K liegt, so ist die durch m und P liegende Linie der geom. Ort von m‴.

Auch der Perpend. auf PP^{I} in ihrer Mitte muß der geom. Ort von m^{III} ſeiñ, folglich giebt der gemeinſch. Durchſchnittspunkt dieſes Perpend. mit der geraden Linie mP den Punkt m^{III}.

Anmerk. Die Aufg. iſt unmöglich, wenn P^{I} in der in P gezogenen Tangente des Kreiſes K liegt.

b) Wenn P, P^{I} außerhalb liegen und K^{III} den Kr. K auf der Seite, wo P, P^{I} liegen, berühren ſoll. (Fig. 4).

Ziehe aus P^{I} an K die Tangente $P^{I}A$; verlängere $P^{I}P$ und mache $PP^{I} \cdot P^{I}B = P^{I}A^{2}$. Hierauf ziehe man an K die Tangente BC und CP. Jetzt beſchr. man um P, P^{I} und um den Durchſchnittspunkt D wo CP^{I} den Kreis K ſchneidet, den Kreis K^{III}.

Beweis. Ziehe PD und verlängere ſie bis nach E, ſo iſt $CE \parallel PP^{I}$ (Lehnſ. 10); alſo berührt K^{III} den Kr. K in D (Lehnſ. 7, 8, 9).

c) Wenn P, P^{I} außerhalb K liegen und K^{III} den Kreis K auf der den Punkten P, P^{I} entgegengeſetzten Seite berühren ſoll. (Fig. 5).

Aufl. Ziehe P, P^{I} und die Berührungslinie $P^{I}A$ an K. Hierauf mache $PP^{I} \cdot P^{I}B = P^{I}A^{2}$, und ziehe an K die Berührungsl. BC. Nun ziehe PC^{I}, verlängere ſie bis nach D, wo ſie den Kreis K wieder trift, und beſchr. um die P. P, P^{I}, D einen Kreis, ſo iſt dieſer K^{III}.

Bew. Ziehe DP und dann CE, ſo iſt $CE \parallel PP^{I}$

(Lehnſ. 12); alſo berührt K''' den Kreis K in D (Lehnſ. 11); der Kreis K''' berührt alſo die gegebenen Punkte und den gegebenen Kreis. Dieſer iſt alſo der verlangte.

d) Wenn P, P' innerhalb K liegen und K''' den Kreis K in dem Halbkreis berühren ſoll, in welchem die gegebenen Punkte liegen (Fig. 6).

Aufl. Ziehe in K durch P' irgend eine Sehne AA'. Mache alsdann PP'.P'B=P'A.P'A' u. ziehe an K die Berührungslinie BC. Hierauf ziehe CP', welche verlängert K in D ſchneidet, ſo iſt der durch D, P, P' gezeichnete Kreis der geſuchte Kreis K'''.

Beweis. Ziehe DP und verlängere ſie, bis K in E geſchnitten wird, ſo iſt CE ‖ PP' (Lehnſ. 15); alſo berührt K''' den Kreis K in D (Lehnſ. 11). K''' berührt alſo K in dem Halbkreis, worinnen P, P' liegen.

e) Wenn P, P' innerhalb K liegen und K''' den Kreis K in dem Halbkreiſe berühren ſoll, in welchem P, P' nicht liegen (Fig. 7).

Aufl. Ziehe durch P' in K irgend eine Sehne AA'. Alsdann ziehe PP', verlängere ſie und mache PP'.P'B = AP'.P'A'. Hierauf ziehe an K die Berührungsl. BC und alsdann CP', die verlängert K in D trift. Durch D, P, P' lege einen Kreis. Dieſer iſt alsdann K'''.

Beweis. Ziehe DP und verlängere ſie bis K

ist aber gegeben; denn es ist dem Qdr. der Tang. aus ε gl.; also ist auch ϑ.εδ gegeb. Nun ist aber εδ gegeb.; also auch ϑε. Sie ist aber der Lage nach gegeben, denn ε ist gegeben, also auch ϑ; ferner ist ζ gegeben. Man hat also über ϑζ die Figur ϑγζ zu errichten, und βα der Linie ϑζ parallel zu ziehen. Dies ist aber oben gelehrt worden (10. Hülfssatz); also ist auch γ gegeben. Es ist aber auch ε gegeben; also auch γα der Lage nach. Es ist aber auch der Kreis gegeben, also auch der Punkt α. Ferner ist der Punkt δ gegeben; also auch δα der Lage nach. Man stelle daher die Aufg. auf folgende Art: Es sei der Kreis αβγ nebst den in einer geraden Linie liegenden drei Punkten δ, ε, ζ gegeben, und dem Quadrate der Tangente sei gleich ϑ.εδ. Ueber den gegebenen Punkten ϑ, ζ errichte man ferner den Winkel ϑγζ, so daß βα parallel ϑζ sei, ziehe εγ sei und verlängere sie bis α, so behaupte ich, daß die Linie αβδ eine gerade Linie ist. Denn wenn εγ.εα und ϑ.εδ beide gleich sind dem Quadrate der Tangente aus ε, so ist εγ.εα gleich ϑ.εδ. Also liegen die Punkte δ, ϑ, γ, α in einem Kreise; und da der Winkel βαγ dem Winkel γϑζ gleich ist und auch dem Winkel βαγ im Kreise, so ist auch der Winkel βαγ dem Winkel γϑε gleich; nun liegen die Punkte α, γ, δ, ϑ in einem Kreise, also ist die Linie αβδ eine gerade Linie.

Was noch übrig ist, wird mit seinen besonderen

Fällen auf die besondern Fälle der 20sten Aufg. zurückgeführt.

23. Wenn zwei Kreise $\alpha\beta$, $\gamma\delta$ (Fig. 19) gegeben sind, und man zieht $\alpha\delta$ und macht $\varepsilon\eta$ zu $\varepsilon\zeta$ wie der Halbm. des Kreises $\alpha\beta$ zum Halbm. des Kreises $\delta\gamma$, so schneidet eine von ε aus gezogene Linie, welche den Kreis $\gamma\delta$ schneidet, auch den Kreis $\alpha\beta$.

Man nehme die Punkte η, ζ, die Mittelp. der Kreise, ziehe von ε die Tangente $\varepsilon\vartheta$ des Kreises $\gamma\delta$, ziehe $\zeta\vartheta$ und dieser Linie parallel $\varkappa\varepsilon$. Da nun $\varkappa\varepsilon$ sich verhält zu $\varepsilon\zeta$ wie $\varepsilon\varkappa$ zu $\zeta\vartheta$, so ist die durch die P. ε, ϑ, $\varkappa$ gehende Linie eine gerade Linie. Nun ist der W. ϑ ein Rechter, also auch der bei $\varkappa$. Wenn daher die Linie aus ε den Kreis $\gamma\delta$ berührt, so berührt sie auch, wenn sie verlängert wird, den Kreis $\alpha\beta$. Aber auch die Linien, welche den Kreis $\gamma\delta$ zwischen δ, ϑ schneiden, werden in ihrer Verläng. zwischen $\varkappa$, β treffen. Nun ist aber $\varepsilon\varkappa$ die Tangente; die Linien zwischen β, $\varkappa$, δ, ϑ schneidet also; also schneidet dieselbe Linie, von ε ausgezogen, auch den Kreis $\alpha\beta$.

Das erste Buch von den Berührungen hat sieben Aufgaben, das zweite vier.

Auflösung der Aufgaben von den Berührungen.

Um die Aufg. einen Kreis zu beschreiben, der gegebene Punkte, Linien und Kreise berühre, zu lösen, so wollen wir zuerst die hier möglichen Combinationen der gegebenen Elemente aufstellen.

Bezeichnen wir die gegebenen Elemente Punkt, Linie, Kreis durch P, L, K, so ergiebt sich

I. Klasse.	Ein Element gegeben	P,	L,	K
II. Klasse.	Zwei Elemente	PP′,	PL,	PK
			LL′,	LK,
				KK′
III. Klasse.	Drei Elemente	PP′P″,	PP′L,	PP′K.
			PLL′,	PLK
				PKK′
			LL′L″,	LL′K.
				LKK′
				KK′K″

on mehr als drei gegebenen Elementen kann bei die Aufg. nicht die Rede sein, da vier und mehrere r unter gewissen besonderen Bedingungen von dem suchten Kreise zugleich mit berührt worden.

Um mich kurz und doch bestimmt ausdrücken zu nnen, will ich künftig immer den gesuchten Berühngskreis mit K''' und die Mittelp. der Kreise K, , K'' und K^{IV} mit m, m', m'' und m''', so wie e Halbm. mit r, r', r'' und r''' bezeichnen.

Die erste Klasse liefert also folgende drei Aufgaben:

I. Aufg. Wenn ein Punkt P gegeben ist.

Aufl. Jede durch P gelegte gerade Linie ist der om. Ort von m'''.

II. Aufg. Wenn eine Linie L gegeben ist.

Aufl. Jede Linie, welche L rechtw. durchschnei t, ist der geom. Ort von m'''.

III. Aufg. Wenn ein Kreis K gege n ist.

Aufl. Jede durch den Mittelp. K gezogene ge de Linie ist der geom. Ort von m'''.

Alle 3 Aufg. sind gänzlich unbestimmt, sowohl Rücksicht der Größe als der Lage des Halbmessers r''' vom Kreise K'''.

B. Die zweite Klasse liefert folgende sechs Aufgaben:

I. Aufg. Wenn zwei Punkte P, P′ gegeben sind.

Aufl. Eine Linie, welche die Verbindungslinie der beiden gegebenen Punkte in ihrer Mitte winkelrecht durchschneidet, ist der geom. Ort von m'''; r''' ist der Größe und Lage nach unbestimmt.

II. Aufg. Wenn ein Punkt P und eine Linie L gegeben ist.

Aufl. a) Wenn P in L liegt, so liegt m''' in einer durch P auf L winkelrecht gezogenen Linie, aber die Lage und Größe von r''' ist unbestimmt.

b) Liegt P außerhalb L, so liegt m''' in der Mitte des Perpend. von P auf L, und der halbe Perpend. ist r'''.

III. Aufg. Wenn ein Punkt P und ein Kreis K gegeben ist.

Aufl. a) Liegt P in der Peripherie von K, so ist die durch m und durch P gezogene gerade Linie der geom. Ort; also ist r''' der Größe und Lage nach unbestimmt.

b) Wenn P außerhalb oder innerhalb K liegt,

liegt m''' in derj. Linie, die durch m und durch P
ogen wird.

Halbirt man die Linie zwischen P und K, so hat
an m''' und r'''. Weil es hier zwei verschiedene
ntfernungen zwischen P und K giebt, so giebt es
ch immer zwei versch. Kreise K'''.

IV. Aufg. Wenn zwei gerade Linien L,
' gegeben sind.

Aufl. a) Sind L, L' parallel, so ist eine von
und L' gleichweit entfernt liegende Parallele der
om. Ort von m''' und r''' ist gleich dem Abstande
ischen m''' und L; r''' ist also der Größe und
ge nach bestimmt, obgleich der Ort von m''' unbe-
mmt ist.

b) Sind L und L' convergirend, so ist die Linie,
elche den Winkel, den diese convergirenden L. mit
nander bilden, halbirt, der geom. Ort von m''', und
n Perpend. von m''' auf L oder L' gleich r'''.

Da der Ort m''' beliebig, so ist r''' der Größe
ch unbestimmt.

V. Aufg. Wenn eine Linie L und ein
reis K gegeben sind.

Aufl. a) Wenn L den Kreis K berührt, so ist
e durch m und den Berührungsp. gezogene gerade
nie der geom. Ort von m''', und r''' gleich der

Entfernung des Punktes m''' vom Berührungsp. — Größe und Lage des Halbm. ist daher unbestimmt. Siehe Aufg. III, a.

b) Wenn L den Kreis K schneidet oder außerhalb K liegt, so ist m''' in der durch m auf L perpd. gezogenen Linie. Die Aufg. ist nun einerlei mit Aufg. III, b.

VI. Aufg. Wenn zwei Kreise K, K′, gegeben sind.

Aufl. a) Wenn K, K′ sich von außen oder von innen berühren, so ist die durch m, m′ gezogene gerade Linie der geom. Ort von m''', und r''' der Größe und Lage nach unbestimmt, wie Aufg. III, a und V, a.

b) Wenn K, K′ sich schneiden oder K ganz innerhalb oder ganz außerhalb K′ liegt, so liegt m''' in der durch m und m′ gezogenen L. Diese Linie giebt mit der Kreislinie K, K′ 4 Durchschnittsp.; die Mitte der Entfernung je zwei dieser Punete, die zu verschiedenen Kreisen gehören, giebt ein m'''. Es giebt also hier 4 verschiedene r'''.

C. Die dritte Klasse liefert folgende zehn Aufgaben:

I. Aufg. Wenn drei nicht in gerader Linie liegende Punkte P, P′, P″, gegeben sind.

Aufl. Steht in allen Anfangsgründen der Geometrie.

II. Aufg.

II. Aufg. Wenn zwei Punkte P, P′ und ine Linie L gegeben sind.

Aufl. a) Wenn P, P′ prll. mit A liegen. In ig. 1 sei AB die gegebene L. PP′ wird also eine ehne und AB eine Tangente von K‴. Der Beührungspunkt D ergiebt sich durch den Perpend. auf ie Mitte C der Sehne PP′, und nun bestimmt man ‴ wie Aufg. I.

b) Wenn P in L und P′ außerhalb liegt (Fig. 2), o ist P der Berührungsp. der Tangente AB und PP′ er Sehne von K‴. Hieraus ergiebt sich die aus der igur zu ersehende Constr.

c) Wenn P, P′ ganz außerhalb auf einerlei Seite on L und nicht prll mit L liegen.

Die Linien AB und PP′ (Fig. 3) verlängert chneiden sich in C. Es wird also PP′ eine Sehne nd CA eine Tangente von K‴. Wäre D der Beührungspunkt, so ist

$$CP' : CD = CD : CP.$$

ist auf solche Art CD bestimmt worden, so beschr. nan durch die drei Punkte D, P, P′ einen Kreis K‴.

III. Aufg. Wenn zwei Punkte P, P′ und in Kreis K gegeben sind.

Aufl. a) Wenn P in der Periph. von K und ′ außerhalb oder innerhalb K liegt, so ist die durch n und P liegende Linie der geom. Ort von m‴.

Auch der Perpend. auf PP^1 in ihrer Mitte muß der geom. Ort von m''' seiñ, folglich giebt der gemeinsch. Durchschnittsp. dieses Perpend. mit der geraden Linie mP den Punkt m'''.

Anmerk. Die Aufg. ist unmöglich, wenn P' in der in P gezogenen Tangente des Kreises K liegt.

b) Wenn P, P^1 außerhalb liegen und K''' den Kr. K auf der Seite, wo P, P^1 liegen, berühren soll. (Fig. 4).

Ziehe aus P^1 an K die Tangente P^1A; verlängere P^1P und mache $PP^1 . P^1B = P^1A^2$. Hierauf ziehe man an K die Tangente BC und CP. Jetzt beschr. man um P, P^1 und um den Durchschnittsp. D wo CP^1 den Kreis K schneidet, den Kreis K'''.

Beweis. Ziehe PD und verlängere sie bis nach E, so ist $CE \parallel PP^1$ (Lehns. 10); also berührt K''' den Kr. K in D (Lehns. 7, 8, 9).

c) Wenn P, P^1 außerhalb K liegen und K''' den Kreis K auf der den Punkten P, P^1 entgegengesetzten Seite berühren soll. (Fig. 5).

Aufl. Ziehe P, P^1 und die Berührungslinie P^1A an K. Hierauf mache $PP^1 . P^1B = P^1A^2$, und ziehe an K die Berührungsl. BC. Nun ziehe PC^1, verlängere sie bis nach D, wo sie den Kreis K wieder trift, und beschr. um die P. P, P^1, D einen Kreis, so ist dieser K'''.

Bew. Ziehe DP und dann CE, so ist $CE \parallel PP^1$

(Lehnſ. 12); alſo berührt K''' den Kreis K in D (Lehnſ. 11); der Kreis K''' berührt alſo die gegebenen Punkte und den gegebenen Kreis. Dieſer iſt alſo der verlangte.

d) Wenn P, P' innerhalb K liegen und K''' den Kreis K in dem Halbkreis berühren ſoll, in welchem die gegebenen Punkte liegen (Fig. 6).

Aufl. Ziehe in K durch P' irgend eine Sehne AA'. Mache alsdann PP'.P'B=P'A.P'A' u. ziehe an K die Berührungslinie BC. Hierauf ziehe CP', welche verlängert K in D ſchneidet, ſo iſt der durch D, P, P' gezeichnete Kreis der geſuchte Kreis K'''.

Beweis. Ziehe DP und verlängere ſie, bis K in E geſchnitten wird, ſo iſt CE ∥ PP' (Lehnſ. 15); alſo berührt K''' den Kreis K in D (Lehnſ. 11). K''' berührt alſo K in dem Halbkreis, worinnen P, P' liegen.

e) Wenn P, P' innerhalb K liegen und K''' den Kreis K in dem Halbkreiſe berühren ſoll, in welchem P, P' nicht liegen (Fig. 7).

Aufl. Ziehe durch P' in K irgend eine Sehne AA'. Alsdann ziehe PP', verlängere ſie und mache PP'.P'B = AP'.P'A'. Hierauf ziehe an K die Berührungsl. BC und alsdann CP', die verlängert K in D trift. Durch D, P, P' lege einen Kreis. Dieſer iſt alsdann K'''.

Beweis. Ziehe DP und verlängere ſie bis K

in E trift, ſo iſt CE || PP' (Lehnſ. 14). Alſo berühret der durch D, P, P' gezeichnete Kreis den Kreis K in D und iſt alſo der verlangte Kreis K'''.

IV. Aufg. Wenn zwei gerade Linien L, L' und ein Punkt P gegeben ſind.

a) Wenn P in L' liegt und L, L' parallel ſind.

Aufl. Fälle durch P auf die Prllen. einen Perpendikel, ſo iſt deſſen Mitte m''' und die halbe Entfernung der Prllen. iſt r'''.

b) Wenn P zwiſchen L und L' und näher an L als an L' liegt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' iſt eine Prlle. L''' mitten zwiſchen L und L' mit dieſen Linien. Aus P beſchr. man mit der halben Entfernung der Prllen. L, L' einen Kreis, ſo muß auch m''' in der Periph. dieſes Kreiſes liegen, mithin in dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt mit L''', und die halbe Entfernung der Prllen. L, L' iſt r'''.

c) Wenn P in der Mitte zwiſchen L und L liegt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' iſt die durch P mit L gezogene Prlle. L'''. Aus P trage auf L''' die halbe Entfernung der Prllen. L, L', ſo giebt dieſes m''' und m'''P iſt r'''.

d) Wenn L und L′ convergiren und P in L liegt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' ist die Linie, die den Winkel halbirt, welchen L und L′ verlängert mit einander machen; auch ist zugleich der Perpd. in P auf L der geom. Ort von m''', daher der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt beider Linien m''' giebt. Der Abstand m''' von L′ ist r'''.

e) Wenn L, L′ convergirend u. P näher an L als an L′ liegt.

Aufl. Halbire den W. A welchen L und L′ bilden; durch AB beschr. aus einem beliebigen P. C der AB einen Kreis, der L und L′ in D und E berührt. Ziehe AP, so schneidet diese den Kreis in F. Ziehe den Halbm. CF und PB || CF, so ist B der Mittelp. m''' und $BP = r'''$.

Beweis. Ziehe noch die Halbm. CD, CE nach den Berührungsp. D, E. Ferner fälle die Halbm. BG, BH perpd. auf AG und AF.

Von den drei Verhältnissen

$$CD : BH,$$
$$CF : BP,$$
$$CE : BG;$$

ist jedes gleich AC : AB; also sind die drei Verh. einander gleich. Da nun in allen drei Verhältnissen die Vorderglieder als Halbm. eines Kreises einander

gleich sein müssen; so sind auch die drei Hinterglieder einander gleich d. h. BH = BP = BG. Da nun diese drei Linien von einem gemeinsch. Punkte B ausgehen, so sind sie Halbm. des Kreises K''' und B ist m'''.

f) Wenn L, L' convergirend und P von L und L' gleich weit entfernt liegt. (Fig. 9).

Aufl. Ziehe AP und beschr., wie vorher, einen Kreis, der L, L' in D und E berühret. Aus F wo AP den gedachten Kreis schneidet, ziehe man FD, und aus P ziehe PH ∥ FD. Errichte in H auf AH den Perpd. HB, so ist B der gesuchte Mittelp. m''' und BH = r'''.

Beweis. Ziehe die Halbm. CD, CE nach den Berührungsp. D, E und fälle aus dem Mittelp. B den Perpd. BG auf AG, so ist der △CDF ∽ △BHP,

daher CD : DF = BH : HP

und auch CF : DF = BP : HP,

Da in beide Prop. die vordern Verh. gleich sind, so sind es die hinteren auch; und da in diesen auch die Hinterglieder gleich sind, so sind auch ihre Vorderglieder gleich d. h. BH = BP.

Da nun aber auch AC : AB = CD : BH

und AC : AB = CE : BG,

so ist auch CD : BH = CE : BG,

u. da CD = CE, so ist auch BH = BG.

Also sind, die drei aus einem gemeinsch. P. B ausgehenden Linien BH, BP, BG einander gleich und der P. B der gesuchte Mittelp. m''' und $BP = r'''$.

V. Aufg. Wenn ein Punkt P, eine Linie L und ein Kreis K gegeben ist.

Aufl. a) Wenn L den Kreis K berührt und P dieser Berührungsp. ist.

m''' liegt in diesem Falle in der Mitte des Halbmessers r nach dem Berührungsp. P, und $r''' = \frac{1}{2}r$.

b) Wenn K von L berührt wird und P innerhalb der Peripherie oder außerhalb K, nur nicht in L liegt, den Fall a) ausgenommen. Die Aufg. ist einerlei mit Aufg. III.

c) Es liege P in L, so daß ein Perpd. aus m auf L den Punkt P treffe, so liegt m''' in diesem Perpd. von P um $r''' = \frac{1}{2}(p - r)$ entfernt. Oder

um $r''' = \frac{1}{2}(p + r)$.

d) Es liege P in K und so daß r durch P gezogen auf L perpd. sei.

Die Aufl. wie in c.

e) Wenn ein Kreis K, eine gerade Linie L und ein Punkt gegeben sind, und P liegt in K, so daß ein Perpend. aus m auf L den Punkt P nicht treffe (Fig. 10).

Aus m fälle auf die gegebene Linie AB den Perpendikel DC. Durch P ziehe DP, die verlängert L in

E trift. In E errichte den Perpd. Em'''. Da, wo dieser die durch m und P gezogene Linie trift ist m''' und $m'''E = r'''$.

Beweis. Da $\triangle PEm'''$ ∽ $\triangle mPD$, so muß $m'''E = m'''P$ sein. Also geht der aus m''' mit $m'''E$ beschriebene Kreis durch P, berührt K in P (Lehns. 18) und ist also der verlangte Kreis K'''.

f) Wenn P, in L liegt so daß ihn ein Perpd. aus m auf L nicht treffe (Fig. 11).

Errichte in P auf der gegebenen AB den Perpd. Pm'''. Aus m ziehe $mC \parallel Pm'''$. Ziehe CP und durch den Durchschnittsp. D ziehe mD bis sie den genannten Perpd. und m''' trift, so ist $m'''P = r'''$.

Beweis. Der $\triangle Pm'''D$ ∽ $\triangle DmC$, also $m'''D = m'''P$. Der Kreis um m''' mit $m'''P$ beschrieben berührt also die Linie AB in P und den Kreis K in D u. ist also der verlangte Kreis K'''.

g) Wenn P in L außerhalb K, u. P nicht in L liegt (Fig. 12) und K''' außerh. von K berührt wird.

Aus m ziehe auf die gegebene AB den Perpd. DC. Ziehe DP mache $DP \cdot DF = DC \cdot DE$ und beschr. durch die Punkte P und F einen Kreis, der AB berührt, so ist dieses der verlangte Kreis.

Beweis. Ziehe DG und EH. Da bei C und H rechte W., so liegen die vier Punkte C, E, H, G in einem Kreise; also ist

DC . DE = DG . DH.

Da nun auch DP . DF = DG . DH,

so ist auch DC . DE = DP . DF.

Umgekehrt da DC . DE = DP . DF

und DG . DH = DC . DE,

so ist auch DG . DH = DP . DF.

Also liegen die Punkte P, F, H, G in der Peripherie des Kreises PH. Es liegt aber der Punkt H auch in der Peripherie des Kreises K, die L. DG geht durch H und mD, m'''G sind die Halbm. der Kreise K und PH; also berührt der Kreis PH den Kreis K in H (Lehns. 18). Er ist also K'''.

h) Wenn alles wie in (g), der Kreis K''' aber von K inwendig berührt wird (Fig. 13).

Fälle aus m auf die gegebene Linie AB den Perpd. EC. Ziehe PD, mache PD . DF = DE . DC, und beschreibe durch die Punkte P und F einen Kreis, der die Linie AB in G berühre, so ist dieser der gesuchte Kreis.

Beweis. Ziehe GD, verlängere sie bis H, und HE verlängert bis I. Da nun ED = 2r ist, so ist ∠ GHE = R. Es ist aber auch der Winkel bei C = R; also liegen die Punkte E, H, C, G in einem Kreise.

folglich ist DG . DH = DE . DC.

Es ist aber auch PD . DF = DE . DC;

also ist DG . DH = PD . DF.

Hiernach liegen die Punkte G, F, H, P in der Peripherie des Kreises IG; also berührt er den P. D, und K berührt ihn inwendig in H. Denn man ziehe Hm, mm''' und den Halbm. m'''G perpd. auf L, so ist leicht noch zu erweisen, daß m'''G ‖ mD, also ist HD . m'''G = HG . mD;

Folglich ist ∠ mHD = ∠ m'''HG.

Da nun HDG eine gerade Linie ist, so ist es auch Hmm'''. Da aber m'''H der Halbm. des Kreises IG ist, so berührt K den Kreis um m''' inwendig in H. Der Kreis um m''' berührt aber auch nach der Constr. die Linie L u. geht durch P u. ist also der Kreis K'''.

VI. Aufg. Wenn ein Punkt P und zwei Kreise K, K' gegeben sind.

a) Wenn P in der Peripherie von K so liegt, daß die Centrale beider Kreise durch P gehet. (Fig. 14).

Aufl. Ziehe die Centrale mm' und beschr. über AP einen Kreis, so ist dieser Kreis K'''.

Beweis. Nach Lemma 6. berührt der aus m'' mit m''P gezogene Kreis die beiden Kreise K, K' und geht durch P. Er ist folgl. der Kreis K'''.

b) Wenn P in der Peripherie von K aber so liegt, daß die Centrale mm' nicht durch E

gehet, und K''' diese Kreise K, K' auswendig berühren soll (Fig. 15).

Aufl. Ziehe mP und mA' || mP. Hierauf ziehe AP; diese giebt mit K' den Durchschnittsp. B. Ziehe m'B. Wo sich nun die verlängerten mP und m'B schneiden, da ist der Mittelp. m''' des Kreises K''', dessen Halbm. m'''P.

Beweis. Angenommen, K' und K''' berühren sich in B. Zöge man nun m'''B, m'B, AB, BP und m'''P || m'A, so müssen m'''Bm', ABP gerade Linien sein (Lemma 15). Da nun umgekehrt m'''m', AP gerade Linien sind und m'''P || m'A, so berühren sich die Kreise K''', K' in B. Denn es sei m'''P || m'A, und m'''m', AP seien gerad eLinien, so sind die Tr. ABm', BPm''' ähnl.; also m'B . m'''P = m'A . Bm'''. Da nun aber m'B = m'A = r', so ist auch m'''P = m'''B.

Also ist auch m'''B ein Halbm. von dem, mit m'''K beschr. Kreise. Es berührt also der aus m''' mit m'''P beschr. Kreis die Kreise K und K' in P und B (Lemma 4); er ist also der verlangte Kreis K'''.

c) Es sei Alles wie in b, nur soll K''' den Kreis K, in dessen Peripherie P liegt, auswendig und K' inwendig berühren (Fig. 16).

Aufl. Ganz wie vorher in (b). Der Beweis folgt aus Lemma 16 und Lemma 6.

Auch der Perpend. auf PP^1 in ihrer Mitte muß der geom. Ort von m''' seyn, folglich giebt der gemeinsch. Durchschnittsp. dieses Perpend. mit der geraden Linie mP den Punkt m'''.

Anmerk. Die Aufg. ist unmöglich, wenn P' in der in P gezogenen Tangente des Kreises K liegt.

b) Wenn P, P^1 außerhalb liegen und K''' den Kr. K auf der Seite, wo P, P^1 liegen, berühren soll. (Fig. 4).

Ziehe aus P^1 an K die Tangente P^1A; verlängere P^1P und mache $PP' \cdot P^1B = P^1A^2$. Hierauf ziehe man an K die Tangente BC und CP. Jetzt beschr. man um P, P^1 und um den Durchschnittsp. D wo CP^1 den Kreis K schneidet, den Kreis K'''.

Beweis. Ziehe PD und verlängere sie bis nach E, so ist $CE \parallel PP^1$ (Lehns. 10); also berührt K''' den Kr. K in D (Lehns. 7, 8, 9).

c) Wenn P, P^1 außerhalb K liegen und K''' den Kreis K auf der den Punkten P, P^1 entgegengesetzten Seite berühren soll. (Fig. 5).

Aufl. Ziehe P, P^1 und die Berührungslinie P^1A an K. Hierauf mache $PP' \cdot P^1B = P^1A^2$, und ziehe an K die Berührungsl. BC. Nun ziehe PC^1, verlängere sie bis nach D, wo sie den Kreis K wieder trift, und beschr. um die P. P, P^1, D einen Kreis, so ist dieser K'''.

Bew. Ziehe DP und dann CE, so ist $CE \parallel PP^1$

(Lehnſ. 12); alſo berührt K''' den Kreis K in D (Lehnſ. 11); der Kreis K''' berührt alſo die gegebenen Punkte und den gegebenen Kreis. Dieſer iſt alſo der verlangte.

d) Wenn P, P' innerhalb K liegen und K''' den Kreis K in dem Halbkreis berühren ſoll, in welchem die gegebenen Punkte liegen (Fig. 6).

Aufl. Ziehe in K durch P' irgend eine Sehne AA'. Mache alsdann PP'. P'B = P'A. P'A' u. ziehe an K die Berührungslinie BC. Hierauf ziehe CP', welche verlängert K in D ſchneidet, ſo iſt der durch D, P, P' gezeichnete Kreis der geſuchte Kreis K'''.

Beweis. Ziehe DP und verlängere ſie, bis K in E geſchnitten wird, ſo iſt CE ∥ PP' (Lehnſ. 13); alſo berührt K''' den Kreis K in D (Lehnſ. 11). K''' berührt alſo K in dem Halbkreis, worinnen P, P' liegen.

e) Wenn P, P' innerhalb K liegen und K''' den Kreis K in dem Halbkreiſe berühren ſoll, in welchem P, P' nicht liegen (Fig. 7).

Aufl. Ziehe durch P' in K irgend eine Sehne AA'. Alsdann ziehe PP', verlängere ſie und mache PP' . P'B = AP' . P'A'. Hierauf ziehe an K die Berührungsl. BC und alsdann CP', die verlängert K in D trift. Durch D, P, P' lege einen Kreis. Dieſer iſt alsdann K'''.

Beweis. Ziehe DP und verlängere ſie bis K

w E trift, ſo iſt CE || PP' (Lehnſ. 14). Alſo berühret der durch D, P, P' gezeichnete Kreis den Kreis K in D und iſt alſo der verlangte Kreis K'''.

IV. Aufg. Wenn zwei gerade Linien L, L' und ein Punkt P gegeben ſind.

a) Wenn P in L' liegt und L, L' parallel ſind.

Aufl. Fälle durch P auf die Prllen. einen Perpendikel, ſo iſt deſſen Mitte m''' und die halbe Entfernung der Prllen. iſt r'''.

b) Wenn P zwiſchen L und L' und näher an L als an L' liegt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' iſt eine Prlle. L''' mitten zwiſchen L und L' mit dieſen Linien. Aus P beſchr. man mit der halben Entfernung der Prllen. L, L' einen Kreis, ſo muß auch m''' in der Periph. dieſes Kreiſes liegen, mithin in dem gemeinſchaftlichen Durchſchnitt mit L''', und die halbe Entfernung der Prllen. L, L' iſt r'''.

c) Wenn P in der Mitte zwiſchen L und L liegt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' iſt die durch P mit L gezogene Prlle. L'''. Aus P trage auf L''' die halbe Entfernung der Prllen. L, L', ſo giebt dieſes m''' und m'''P iſt r'''.

d) Wenn L und L′ convergiren und P in L liegt.

Aufl. Der geom. Ort von m''' ist die Linie, die den Winkel halbirt, welchen L und L′ verlängert mit einander machen; auch ist zugleich der Perpd. in P auf L der geom. Ort von m''', daher der gemeinschaftliche Durchschnittspunkt beider Linien m''' giebt. Der Abstand m''' von L′ ist r'''.

e) Wenn L, L′ convergirend u. P näher an L als an L′ liegt.

Aufl. Halbire den W. A welchen L und L′ bilden; durch AB beschr. aus einem beliebigen P. C der AB einen Kreis, der L und L′ in D und E berührt. Ziehe AP, so schneidet diese den Kreis in F. Ziehe den Halbm. CF und PB || CF, so ist B der Mittelp. m''' und $BP = r'''$.

Beweis. Ziehe noch die Halbm. CD, CE nach den Berührungsp. D, E. Ferner fälle die Halbm. BG, BH perpd. auf AG und AF.

Von den drei Verhältnissen

CD : BH,
CF : BP,
CE : BG;

ist jedes gleich AC : AB; also sind die drei Verh. einander gleich. Da nun in allen drei Verhältnissen die Vorderglieder als Halbm. eines Kreises einander

gleich sein müssen; so sind auch die drei Hinterglieder einander gleich d. h. BH = BP = BG. Da nun diese drei Linien von einem gemeinsch. Punkte B ausgehen, so sind sie Halbm. des Kreises K''' und B ist m'''.

f) Wenn L, L' convergirend und P von L und L' gleich weit entfernt liegt. (Fig. 9).

Aufl. Ziehe AP und beschr., wie vorher, einen Kreis, der L, L' in D und E berühret. Aus F wo AP den gedachten Kreis schneidet, ziehe man FD, und aus P ziehe PH ∥ FD. Errichte in H auf AH den Perpd. HB, so ist B der gesuchte Mittelp. m''' und BH = x'''.

Beweis. Ziehe die Halbm. CD, CE nach den Berührungsp. D, E und fälle aus dem Mittelp. B den Perpd. BG auf AG, so ist der △CDF ∽ △BHP,

daher CD : DF = BH : HP

und auch CF : DF = BP : HP,

Da in beide Prop. die vordern Verh. gleich sind, so sind es die hinteren auch; und da in diesen auch die Hinterglieder gleich sind, so sind auch ihre Vorderglieder gleich d. h. BH = BP.

Da nun aber auch AC : AB = CD : BH

und AC : AB = CE : BG,

so ist auch CD : BH = CE : BG,

u. da CD = CE, so ist auch BH = BG.

Also sind, die drei aus einem gemeinsch. P. B ausgehenden Linien BH, BP, BG einander gleich und der P. B der gesuchte Mittelp. m''' und $BP = r'''$.

V. Aufg. Wenn ein Punkt P, eine Linie L und ein Kreis K gegeben ist.

Aufl. a) Wenn L den Kreis K berührt und P dieser Berührungsp. ist.

m''' liegt in diesem Falle in der Mitte des Halbmessers r nach dem Berührungsp. P, und $r''' = \frac{1}{2}r$.

b) Wenn K von L berührt wird und P innerhalb der Peripherie oder außerhalb K, nur nicht in L liegt, den Fall a) ausgenommen. Die Aufg. ist einerlei mit Aufg. III.

c) Es liege P in L, so daß ein Perpd. aus m auf L den Punkt P treffe, so liegt m''' in diesem Perpd. von P um $r''' = \frac{1}{2}(p - r)$ entfernt. Oder

um $r''' = \frac{1}{2}(p + r)$.

d) Es liege P in K und so daß r durch P gezogen auf L perpd. sei.

Die Aufl. wie in c.

e) Wenn ein Kreis K, eine gerade Linie L und ein Punkt gegeben sind, und P liegt in K, so daß ein Perpend. aus m auf L den Punkt P nicht treffe (Fig. 10).

Aus m fälle auf die gegebene Linie AB den Perpendikel DC. Durch P ziehe DP, die verlängert L in

E trift. In E errichte den Perpd. Em'''. Da, wo dieser die durch m und P gezogene Linie trift ist m''' und $m'''E = r'''$.

Beweis. Da $\triangle PEm''' \sim \triangle mPD$, so muß $m'''E = m'''P$ sein. Also geht der aus m''' mit $m'''E$ beschriebene Kreis durch P, berührt K in P (Lehns. 18) und ist also der verlangte Kreis K'''.

f) Wenn P, in L liegt so daß ihn ein Perpd. aus m auf L nicht treffe (Fig. 11).

Errichte in P auf der gegebenen AB den Perpd. Pm'''. Aus m ziehe $mC \parallel Pm'''$. Ziehe CP und durch den Durchschnittsp. D ziehe mD bis sie den genannten Perpd. und m''' trift, so ist $m'''P = r'''$.

Beweis. Der $\triangle Pm'''D \sim \triangle DmC$, also $m'''D = m'''P$. Der Kreis um m''' mit $m'''P$ beschrieben berührt also die Linie AB in P und den Kreis K in D u. ist also der verlangte Kreis K'''.

g) Wenn P in L außerhalb K, u. P nicht in L liegt (Fig. 12) und K''' außerh. von K berührt wird.

Aus m ziehe auf die gegebene AB den Perpd. DC. Ziehe DP mache $DP \cdot DF = DC \cdot DE$ und beschr. durch die Punkte P und F einen Kreis, der AB berührt, so ist dieses der verlangte Kreis.

Beweis. Ziehe DG und EH. Da bei C und H rechte W., so liegen die vier Punkte C, E, H, G in einem Kreise; also ist

DC . DE = DG . DH.

Da nun auch DP . DF = DG . DH,

so ist auch DC . DE = DP . DF.

Umgekehrt da DC . DE = DP . DF

und DG . DH = DC . DE,

so ist auch DG . DH = DP . DF.

Also liegen die Punkte P, F, H, G in der Peripherie des Kreises PH. Es liegt aber der Punkt H auch in der Peripherie des Kreises K, die L. DG geht durch H und mD, m'''G sind die Halbm. der Kreise K und PH; also berührt der Kreis PH den Kreis K in H (Lehns. 18). Er ist also K'''.

h) Wenn alles wie in (g), der Kreis K''' aber von K inwendig berührt wird (Fig. 13).

Fälle aus m auf die gegebene Linie AB den Perpd. EC. Ziehe PD, mache PD . DF = DE . DC, und beschreibe durch die Punkte P und F einen Kreis, der die Linie AB in G berühre, so ist dieser der gesuchte Kreis.

Beweis. Ziehe GD, verlängere sie bis H, und HE verlängert bis I. Da nun ED = 2r ist, so ist ∠ GHE = R. Es ist aber auch der Winkel bei C = R; also liegen die Punkte E, H, C, G in einem Kreise.

folglich ist DG . DH = DE . DC.

Es ist aber auch PD . DF = DE . DC;

also ist DG . DH = PD . DF.

Hiernach liegen die Punkte G, F, H, P in der Peripherie des Kreises IG; also berührt er den P. D, und K berührt ihn inwendig in H. Denn man ziehe Hm, mm''' und den Halbm. m'''G perpd. auf L, so ist leicht noch zu erweisen, daß m'''G || mD, also ist HD . m'''G = HG . mD;

Folglich ist ∠ mHD = ∠ m'''HG.

Da nun HDG eine gerade Linie ist, so ist es auch Hmm'''. Da aber m'''H der Halbm. des Kreises IG ist, so berührt K den Kreis um m''' inwendig in H. Der Kreis um m''' berührt aber auch nach der Constr. die Linie L u. geht durch P u. ist also der Kreis K'''.

VI. Aufg. Wenn ein Punkt P und zwei Kreise K, K' gegeben sind.

a) Wenn P in der Peripherie von K so liegt, daß die Centrale beider Kreise durch P gehet. (Fig. 14).

Aufl. Ziehe die Centrale mm' und beschr. über AP einen Kreis, so ist dieser Kreis K'''.

Beweis. Nach Lemma 6. berührt der aus m'' mit m''P gezogene Kreis die beiden Kreise K, K' und geht durch P. Er ist folgl. der Kreis K'''.

b) Wenn P in der Peripherie von K aber so liegt, daß die Centrale mm' nicht durch E

gehet, und K''' diese Kreise K, K' auswendig berühren soll (Fig. 15).

Aufl. Ziehe mP und mA' || mP. Hierauf ziehe AP; diese giebt mit K' den Durchschnittsp. B. Ziehe m'B. Wo sich nun die verlängerten mP und m'B schneiden, da ist der Mittelp. m''' des Kreises K''', dessen Halbm. m'''P.

Beweis. Angenommen, K' und K''' berühren sich in B. Zöge man nun m'''B, m'B, AB, BP und m'''P || m'A, so müssen m'''Bm', ABP gerade Linien sein (Lemma 15). Da nun umgekehrt m'''m', AP gerade Linien sind und m'''P || m'A, so berühren sich die Kreise K''', K' in B. Denn es sei m'''P || m'A, und m'''m', AP seien gerad eLinien, so sind die Tr. ABm', BPm''' ähnl.; also m'B . m'''P = m'A . Bm'''. Da nun aber m'B = m'A = r', so ist auch m'''P = m'''B.

Also ist auch m'''B ein Halbm. von dem, mit m'''K beschr. Kreise. Es berührt also der aus m''' mit m'''P beschr. Kreis die Kreise K und K' in P und B (Lemma 4); er ist also der verlangte Kreis K'''.

c) Es sei Alles wie in b, nur soll K''' den Kreis K, in dessen Peripherie P liegt, auswendig und K' inwendig berühren (Fig. 16).

Aufl. Ganz wie vorher in (b). Der Beweis folgt aus Lemma 16 und Lemma 6.

d) Wenn P außerhalb K, K′ liegt, und K‴ beide Kreise außerhalb berühren soll. (Fig. 27).

Aufl. Ziehe die Centrale mm′, welche verlängert den größern Kreis K in A treffe.

Ziehe alsdann auf der Seite von P im Kreise K einen Halbm. mB und hiermit auf derselben Seite aus m′, m′C ∥ mB. Ziehe BC, die verlängert die verlängerte mm′ in C trift, welches geschehen muß, weil m′C parallel und kleiner als mB ist. Hierauf mache man

$$DG \cdot DP = DH \cdot DA$$

und ziehe durch die Punkte P, G einen Kreis, welcher den Kreis K′ auf der Seite, wo P und G liegen (III. Aufg.), berührt, so ist dieser der gesuchte Kreis K‴.

Beweis. Man ziehe mm‴, m‴F, BF, m′G, m′C ∥ mm‴, und FC, so sind mm′, BC gerade Linien (Lemma 15).

Nun verlängere man BC bis sie die verlängerte Am′ in D treffe, so müssen die Linien AD, BD in D einander treffen (Lemma 21); also sind Dm′C, DmB ähnl. Dr., daher

$$Dm' \cdot mB = m'C \cdot Dm;$$

folglich schneidet DF, welche den Kreis K′ schneidet, auch den Kreis K (Lemma 23).

Man verl. also DF bis E und ziehe mE.

Da nun

$$DC \cdot Dm = DB \cdot Dm'$$

und $(DC + CF) \cdot Dm = (DB + BE) \cdot Dm'$,

so ist auch $CF \cdot Dm = BE \cdot Dm'$.

Da aber auch $mB \cdot Dm' = m'C \cdot Dm$,

so ist auch $CF \cdot mB = BE \cdot m'C$.

Da aber $CF \cdot Bm''' = m'C \cdot BF$

und $m'C \cdot BE = CF \cdot mB$,

so ist auch $BE \cdot Bm''' = BF \cdot mB$.

Da nun beide Kreise K, K' von dem aus m''' mit $m'''B$ beschr. Kreise in B und F berührt werden, und er zugleich durch P geht, so ist er auch der verlangte Kreis K'''.

e) Es sei Alles wie in c, nur soll K''' von den Kreisen K, K' inwendig berührt werden (Fig. 18).

Aufl. Man ziehe die Centrale mm'; sie schneide den größern Kreis K in A und den kleinern K' in H. Hierauf ziehe man im größern Kreise K einen Halbm. mB; ihm prll. ziehe man im Kreise K' auf derselben Seite von der Centrale den Halbm. $m'C$ und ziehe BC, die verlängert die verlängerte Centrale in D trift. Dieses Treffen findet Statt, weil $m'C$ parallel und kleiner als mB ist.

Nun ziehe man DP und mache

$$DG \cdot DP = DH \cdot DA.$$

Beschr. jetzt einen Kreis durch die Punkte P und G, den der Kreis K' inwendig berühret (Aufg. III), so ist dieses der verlangte Kreis.

Beweis. Ziehe m'F, m'm''', m'''B, m'C ∥ m'''B, FC, CB, so ist m'''F eine gerade Linie (Lemma 5), und auch FB (Lemma 16). Nun verlängere man BE bis D, wo sie die verlängerte mm' verlängert treffen muß (Lemma 21). Es sind also die Triangel Dm'C, DmB einander ähnl.; also Dm'.mB = Dm.m'C. Folgl. schneidet die L. DF, welche K' schneidet, auch K (Lemma 23). Jetzt ziehe man mE.

Da nun DC . Dm = DB . Dm'
und (DC — CF) . Dm = (DB — BE) . Dm',

so ist auch CF . Dm = BE . Dm'.

Da aber CF . m'''B = m'C . FA
und m'C . EB = FC . mB,

so ist auch m'''B . EB = mB . FB.

Da nun beide K, K', den aus m''' mit m'''P beschr. Kreis innerhalb in B und F berühren, so ist dieses der verlangte Kreis K'''.

f) Wenn K''' von K inwendig und von K auswendig berührt werden soll, alles Uebrige aber wie oben ist (Fig. 19).

Aufl. Ziehe die Centrale mm', welche verlängert K in A und K' in I treffe. Alsdann ziehe den Halbm. mB und auf der entgegengesetzten Seite der

Centrale mm' ziehe man den Halbm. m'C || mB und ziehe BC. Durch D wo die Centrale und BC sich schneiden, ziehe man PD, verlängere diese, mache PD . DG = DH . DA und beschr. durch P, G einen Kreis, der den Kreis K' in F berührt (Aufg. III), so ist dieser der gesuchte Kreis K'''.

Beweis. Angenommen, K, K' berühren den Kreis K''' in B und F, so ziehe man die Centrale mm' und verlängere sie beiderseits bis A und I. Alsdann ziehe nach dem Berührungsp. B den Halbm. mB, und ihm prll. auf der entgegengesetzten Seite von der Centrale den Halbm. m'C. Nun ziehe BC und durch den Durchschnittsp. D ziehe die Sehne PG, so ist

$$\begin{aligned} Dm' : DA &= DC : DA \\ &= m'I : mA, \\ \text{also auch } DI : DA &= DC : DB. \\ \text{Aber es ist } DI : DC &= DF : DH, \\ \text{also } DF : DH &= DA : DB; \\ \hline \text{also } DF \,.\, DB &= DH \,.\, DA. \\ \text{Aber es ist auch } DP \,.\, DG &= HF \,.\, DB, \\ \hline \text{also auch } DP \,.\, DG &= DH \,.\, DA. \end{aligned}$$

Da nun m'C und mA der Größe nach gegeben sind, so ist auch das Verhältniß m'I zu mA gegeben; also auch DC : DA, also auch DC, DA der Größe nach; also auch der Punkt D; daher auch DH, DA der Größe nach; also auch DH . DA, demnach

auch DH der Größe nach gegeben. Es ist also der durch P, H und durch den Berührungsp. F gehende Kreis der gesuchte K'''.

g) Wenn $K = K'$ und P außerhalb K, K' liegt, einen Kreis K''' zu beschr., der durch P gehe und K, K' auswendig berühre (Fig. 20).

Aufl. Aus P beschr. mit $PA = r$ einen Kr.; beschr. alsdann durch m und m' einen Kreis, der von dem aus P beschriebenen inwendig in A berührt wird (Aufg. III). Hierauf ziehe man den Halbm. $m'''A$ und beschr. mit $m'''P$ einen Kreis, so ist dieser K'''.

Beweis. Die Kreise K und K' berühren K''' in B und F auswendig (Lemma 4).

Der Kreis K''' geht überdem durch P u. ist also der verlangte.

h) Wenn Alles wie in f, nur daß K''' von K und K''' inwendig berührt werde (Fig. 21).

Aufl. Man beschreibe aus P mit $PA = mB = r$ einen Kreis. Hierauf beschr. man einen Kreis, der durch m, m' gehet und den Kreis um P im A berührt (Aufg. III). Beschreibe nun mit $m'''P$ einen Kreis, so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Da $m'''P = m'''B = m'''B$, so wird der aus m''' mit $m'''K$ beschr. Kreis von dem Kreise K, K' inwendig in B, C berührt (Lemma 6), und

da

er auch durch P geht, so ist er der gesuchte reis K'''.

h) Wenn alles wie vorher, nur daß K''' von auswendig und von K' inwendig berührt wer- n soll (Fig. 22).

Aufl. Um P beschreibe mit PA = mB = r nen Kreis. Aus m' beschr. mit m'D = 2m'C = r nen Kreis und suche einen Kreis, der den Kreis H und PA auswendig berührt und durch m gehet lufg. VI, e). Endlich beschr. auch m''' mit m'''C nen Kreis, so ist dieser K'''.

Beweis. Offenbar ist m'''P = m'''B = m'''C. er mit m'''P beschr. Kr. gehet also durch P, wird von inwendig in B berührt (Lemma 6), und von K' swärts in C (Lemma 4). Es ist also der aus m''' it m'''P beschriebene Kreis der verlangte Kreis K'''.

Anmerk. Außer den bei dieser VI. Aufg. aufgeführten Fällen lassen sich noch mehrere annehmen; z. B. beide Kreise K, K' können sich berühren von außen oder von innen oder beide schneiden sich, und P kann in der Peripherie des einen oder in beiden liegen oder ganz außerhalb beider Kreise oder innerhalb des andern; ich überlasse diese Fälle zur Uebung.

VII. Aufg. Wenn drei gerade Linien L, ', L'' gegeben sind.

a) Wenn L, L′ von einer dritten L″ durchschnitten werden.

Aufl. Man halbire die beiden innern Winkel, welche L″ mit L und L′ macht, so ist der Durchschnittsp. dieser Halbirungslinien der gesuchten Mittelpunkte m''', und r''' ist gleich der Entfernung m''' von einer der Prllen. L oder L′.

Beweis. Die Halbirungslinien der Winkel sind der geom. Ort von m'''; daher ist ihr gemeinschaftlicher Durchschnitt der Punkt m''' selbst, der von allen drei Linien gleich weit entfernt liegt; daher der aus m''' mit r''' gezogene Kreis die gedachten drei Linien berührt.

Auf beiden Seiten von L″ kann ein solcher Berührungskreis gezogen werden.

b) Wenn sich die drei Linien L, L′, L″ je zwei durchschneiden.

Aufl. Es giebt hier vier Berührungskreise:

1. einer, der die drei Seiten des sich bildenden Triangels berührt;
2. drei andere Kreise, von welchen jeder eine Seite des Triangels von außen und die Verlängerungen der beiden andern Seiten berührt.

Der erste Fall kommt schon in jeder Elementar-Geometrie vor. Die drei Mittelpunkte der drei an-

dern Kreise ergeben sich, wenn man die drei äußern Winkel des Triangels halbirt.

Beweis. Die gedachten Halbirungslinien der Winkel sind der geometrische Ort der gesuchten Mittelpunkte; daher geben ihre gemeinschaftlichen Durchschnitte die Mittelpunkte der gesuchten Kreise selbst.

Wenn zwei gerade Linien und ein Kreis gegeben sind, so ist die Bedingung, daß der Kreis zwischen den gegebenen Linien liege, denn sonst muß der zu suchende Kreis mit einer von den gegebenen Linien zwei Punkte gemein haben und sie auch zugleich berühren; welches unmöglich ist, den Fall ausgenommen, wo der gegebene Kreis eine der gegebenen Linie berührt.

VIII. Aufg. Wenn zwei gerade Linien L, L′ und ein Kreis K gegeben ist.

a) Wenn L, L′ parallel und K eine von diesen Linien z. B. L berührt, K mag außerhalb oder innerhalb der Parallelen liegen.

Aufl. und Bew. Offenbar ist der geom. Ort von m''' ein Perpd. von m auf diese Prllen. und m''' liegt selbst auf diesen Perpd. gleich weit von den beiden Prllen. entfernt.

b) Wenn L, L′ parallel, und K keine berührt.

Aufl. u. Bew. Eine Prll. l in der Mitte zwischen

der aus m''' beschr. L berührt, hat einen Halbm. der um r kleiner ist als der durch m, m' gehende Kreis. Er muß folglich die Kreise K, K' berühren u. ist also der gesuchte.

b) Wenn K, K' gleich und K''' von beiden inwendig berührt wird.

Aufl. Alles wie vorhin, nur daß die Prll. l auf der Seite angetragen wird, wo K, K' liegen. Der Halbm. r''' ist hier der Abstand m''' von L.

c) Wenn K''' von dem einen der gleichen Kreise K auswendig, von dem andern K' auswendig berührt werden soll.

Aufl. Man beschr. um m mit 2r einen Kreis, ziehe eine Linie l in dem Abstand r prll. mit L nach der Seite, wo K und K' liegen, und beschr. um einen Kreis der durch m' geht, l berührt und von dem mit 2r beschr. Kreise auswendig berührt wird (Aufg. V).

Alsdann beschreibe man aus dem Mittelpunkte m''' dieses Kreises mit dem Abstand m''' von L einen Kreis: dieser ist der gesuchte.

Beweis. m''' ist von m, von dem Berührungsp. mit l u. v. dem Kr. dessen Halbm. 2r gleich weit entfernt. Der aus m''' mit dem Abstande m''' von L beschr. Kreis hat einen Halbm. r''', der um r größer als der

vorher aus m''' beschr. Kreis ist er muß also nicht allein von L sondern auch von K auswendig und von K' inwendig berührt werden.

d) Wenn K, K' ungleich und beide K''' auswendig berühren sollen.

Aufl. Man beschr. um m, den Mittelp. des größern Kreises K, mit r — r' einen Kreis k. Ziehe l ‖ L, in einem Abstande r' nach der Seite, wo K, K' nicht liegen, und beschr. einen Kreis k', der l berührt, durch m' geht und von k auswendig berührt wird (Aufg. V). Aus dem Mittelp. m''' des Kreises k' beschr. man mit dem Abstande m''' von L einen Kr., welcher der gesuchte ist.

Beweis. Der Halbm. des zuletzt gezogenen Kreises ist offenbar r''' = dem Abstande l von m''' weniger r'. Dieser muß also L, K und K' berühren.

e) Wenn K, K' ungleich beide den Kreis K''' inwendig berühren sollen.

Aufl. Beschr. um den Mittelp. m des größern Kreises K mit r — r' einen Kreis k und ziehe l ‖ L nach der Seite, wo k, K' liegen, und zwar in einem Abstande = r'. Nun beschreibe einen Kreis k', der durch m' geht, l und k' inwendig berührt (Aufg. V) Aus dem Mittelp. m''' dieses Kreises mit dem Abstande m''' von L beschr. man einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Beweis. Wie vorhin, nur ist hier $r''' =$ dem Abstand m''' von l mehr r'.

f) Wenn $K > K'$ und K''' von K auswendig und von K' inwendig berührt werden soll.

Aufl. Man ziehe eine Linie $l \parallel L$ in einem Abstande $= r$ und zwar auf die Seite, wo K, K' liegen; beschr. um m' mit einem Halbm. $= r' + r$ einen Kreis k, beschr. nun ferner einen Kreis k', der durch m geht, von l berührt und von k auswendig berührt wird (Aufg. V). Aus dem Mittelp. m''' dieses Kreises beschr. man mit dem Abstande des Mittelp. m''' von L einen Kreis, so ist dieser der verlangte Kreis.

Beweis. Wie vorher, der Halbm. r''' ist hier $=$ dem Abstande m''' von l mehr r'.

g) Wenn $K > K'$ und K''' von K auswendig und von K' inwendig berührt wird.

Aufl. Ziehe eine Linie $l \parallel L$ in einer Entfernung r und zwar auf der Seite wo K, K' nicht liegen, und beschreibe um m' einen Kreis k, dessen Halbmesser $= r' + r$. Beschreibe ferner (Aufg. V) einen Kreis k', der durch m geht und l berührt, von dem Kreise k aber inwendig berührt wird. Nun beschreibe man aus dem Mittelp. m''' des Kreises k'

einen Kreis, dessen Halbmesser r''' = dem Abstande L von m''' ist, so ist dieser der gesuchte Kreis K'''.

Beweis. Ganz wie im Vorhergehenden; der Halbmesser K''' ist hier = dem Abstande l von m''' weniger r.

h) Wenn K, L berührt. (Fig. 23).

Aufl. Die gegebene Linie L sei hier AB und werde von K in C berührt. Ziehe den Halbmesser mC. In dessen Verlängerung muß m''' liegen.

Ziehe den Halbm. m'D ∥ mC und ziehe CD, so ergiebt sich der Durchschnittsp. E. Zieht man nun auch den Halbm. m'E und verlängert ihn bis zum Durchschnitte mit dem verlängerten Halbm. m''', so ergiebt sich m'''.

Der aus m''' mit m'''E beschriebene Kreis ist der verlangte.

Beweis. Der △ m'DE ist ∽ △ Cm'''E. Da nun der △ m'DE gleichsch. ist, so ist auch m'''G = m'''E, und nach dem 28. Lehns. berühret der mit m'''E beschriebene Kreis die Kreise K, K'; und da auch L berührt wird, so ist dieser der gesuchte Kreis

Noch andere denkbare Fälle werden sich leicht auffinden und auflösen lassen.

X. Aufg. Wenn drei Kreise K, K', K''' gegeben sind.

a) Wenn alle drei Kreise K, K', K'' einander gleich sind und K''' auswendig berühren sollen.

Aufl. Beschreibet durch die drei Mittelpunkte m, m', m'' einen Kreis k, dessen Halbm. R sei. Aus dem Mittelp. m''' dieses Kreises beschr. man mit einem Halbm. $r''' = R - r$ einen Kreis, so ist dieser der gesuchte K'''.

Beweis. Nach Lehnsatz 4 muß der mit R—r aus m''' beschriebene Kreis die drei Kreise K, K', K'' auswendig berühren.

b) Wenn die drei gleichen Kreise den Kreis K''' inwendig berühren sollen.

Aufl. Man beschr. durch die drei Mittelp. m, m', m'' einen Kreis k, dessen Halbm. R und Mittelpunkt m''' sein mag.

Nun beschr. aus m''' mit $r''' = R + r$ einen Kreis, welcher alsdann der verlangte ist.

Beweis. Der aus m''' mit R+r beschr. Kr. muß nach Lehns. 6 die gegebenen drei Kreise inwendig berühren.

c) Wenn $K = K'$ aber $K''' > K$ ist, und K''' von den drei Kreisen auswendig berührt werden soll.

Aufl. Aus m'' beschr. mit $r'' - r$ einen Kr.

k, und zeichne einen Kreis k', dessen Halbm. R und Mittelp. m''' sein mag, der durch m, m' gehe und den Kreis k auswendig berühre (III. Aufg.). Nun beschr. man aus m''' mit $r''' = R - r$ einen Kreis; dieser wird die drei gegebenen Kreise berühren.

Beweis. Aus dem 4. Lehnsatz erhellet, daß der zuletzt beschr. Kreis die drei gegebenen auswendig berühren muß.

d) Wenn $K = K'$ aber $K'' > K$ ist, und K''' von den gegebenen Kreisen inwendig berührt werden soll.

Aufl. Um m'' beschr. mit $r'' - r$ einen Kreis k. Constr. ferner einen Kreis k', der durch m, m' geht und von k inwendig berührt wird (Aufg. III); sein Mittelp. sei m''' und sein Halbm. R. Endlich beschr. man aus m''' mit $R + r$ einen Kreis, so ist dieser der verlangte.

Beweis. Wie vorher.

e) Wenn $K = K'$, aber $K' < K$ und K''' von den drei gegebenen Kreisen auswendig berührt wird.

Aufl. Man beschr. um die Mittelp. m, m' mit $r - r''$ Kreise k, k. Suche hierauf einen Kreis k' der durch m'' geht und von den gleichen Kreisen k, k

auswendig berührt wird (Aufg. VI). Es sei m''' der Mittelp. und R der Halbm. dieses Kreises.

Beschr. man nun um m''' mit $R-r$ einen Kr., so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Der letzte Kreis muß nach Lehns. 4 die drei gegebenen Kreise auswendig berühren.

f) Wenn $K = K'$ aber $K'' < K$, und K'' von den drei gegebenen Kreisen inwendig berührt werden soll.

Aufl. Man beschr. um m und m' mit $r - r''$ die Kr. k, k. Alsdann beschr. man einen Kreis, der durch m'' geht, und von den Kreisen k, k inwendig berührt wird (Aufg. VI); sein Halbm. sei R und sein Mittelp. m'''. Aus m''' beschr. man mit $R + r''$ einen Kr., so ist dieser der gesuchte Kr. K'''.

Beweis. Nach dem 6. Lehnsatz muß K''' von den drei gegebenen Kreisen inwendig berührt werden.

g) Wenn die drei gegebenen Kreise K, K', K'' ungleich sind und sie den gesuchten Kreis auswendig berühren sollen.

Aufl. Es sei K der kleinere Kreis. Man beschr. aus m' mit $r' - r$ und aus m'' mit $r'' - r$ Kreise k, k'. Nun beschr. man einen Kreis k'', der durch m geht und von den Kreisen k, k' auswendig berührt wird (Aufg. VI). Der Halbm. dieses Kreises

i m''' und der Halbm. R. Endlich beschr. man
n m''' mit R — r einen Kreis, so ist dieser der
esuchte Kreis K'''

Beweis. Uebergehe ich seiner Leichtigkeit wegen.

h) Wenn die drei gegebenen ungleichen Krei-
, den gesuchten inwendig berühren sollen.

Aufl. Es sei K der kleinere. Man beschr. um
' mit r'—r und um m'' mit r''—r Kreise k, k'.
lsdann beschr. man einen Kr. k'', der durch m geht u.
n den Kr. k, k' inwendig berührt wird (Aufg. VI).
er Halbm. von k'' sei R und der Mittelpunkt m'''.
m diesen Mittelpunkt m''' beschr. man ferner mit
+r einen Kreis, so ist dieser der verlangte Kr. K'''.

Beweis. Wie vorher.

i) Wenn zwei von den drei Kreisen den ge-
chten auswendig, der dritte K'' aber ihn inwen-
g berühren soll.

Aufl. Aus m beschr. mit r+r'' einen Kreis k
d um m' mit r'+r'' einen Kreis k'. Jetzt beschr.
an einen Kreis k'' der durch m'' geht und von
n Kreisen k, k' auswendig berührt wird (Aufg. VI).
er Mittelp. dieses Kreises sei m''' und sein Halbm.
Um m''' beschr. endlich mit R+r'' einen Kreis;
ser ist alsdann der verlangte Kreis K'''.

Beweis. Ist eben so leicht wie bei dem vorhergehenden Fall.

k) Der gesuchte Kreis K''' soll von zwei Kreisen K, K' inwendig und von dem Kreis K' auswendig berührt werden.

Aufl. Um m beschr. mit $r + r''$ und um m' mit $r' + r''$ Kreise k, k'. Nachgehends beschr. man (Aufg. VI) einen Kreis k'', der durch m'' geht und die Kreise k, k' inwendig berührt. Es sei R der Halbm. und m''' der Mittelp. dieses Kreises; beschr. man nun mit $R - r''$ einen Kr., so ist dieser der verlangte Kr. K'''.

Beweis. (Lehnsatz 4) berührt der Kreis K'' den Kreis K''' auswendig, und (Lehnsatz 6) berühren die Kreise K, K' den Kreis K''' inwendig. Es ist also K''' der verlangte Kreis.

Die folgende analytisch Aufl. verdient ihrer Eleganz, Einfachheit und Eigenthümlichkeit wegen bekannt zu sein, daher ich hier die Uebersetzung mittheile.

Analytiſche Auflöſung

r Aufgabe: einen Kreis zu finden, der drei andere einer Ebene liegende Kreiſe berührt, von Herrn ergonnen. (Annales de mathématiques Tom. VII. Pag. 289 — 303.) Nismes 1817 in 4to.

---

s ſind ungefähr drei Jahre, als die Turiner Akamie eine Abhandlung drucken lies, die ich derſelben der Abſicht zugeſandt hatte, um vollſtändig die alytiſche Geometrie wegen des Vorwurfs zu rächen, n man ihr nur zu oft macht, daß ſie ſich nicht mit r reinen Geometrie, für die Conſtruktion der Aufben, in Wettſtreit einlaſſen könnte. Ich verſuchte beweiſen, daß dieſe analytiſche Geometrie, ſchickh behandelt, die directeſten, zierlichſten und einchſten Auflöſungen von den ſeit längerer Zeit behmten und für ſchwer gehaltenen zwei Aufgaben rbietet; ich ſpreche nämlich von der Aufg., wo es rauf ankommt: einen Kreis zu beſchreiben,

der drei gegebene Kreise berührt; u. von derj. wo die Frage ist eine Kugel zu beschr., welche vier gegebene Kugeln berührt.

Ich schrieb für vollendete Geometer und glaubte, kurz sein zu müssen. Es scheint, daß ich ein wenig zu kurz war. Mehrere Geometer, die meine Abhandlung kannten, machten mir diesen Vorwurf, der wahrscheinlich seinen Grund darin fand, daß der Faden, der mich geleitet hatte, darin nicht genug sichtbar war, und daß meine Rechnungen eher geeignet scheinen eine durch einen glücklichen Zufall gefundene Construktion zu legitimiren als zu dienen, diese Constr. zu entdecken.

Es scheint selbst, daß, als Folge eines übertriebenen Laconismus, viele Geometer meinen Methoden nicht haben folgen und den Geist davon auffassen können.

Dieses bestimmt mich jetzt, denselben Gegenstand wieder vorzunehmen, in der Absicht, ihn mehr zu entwickeln und ihn den Anfängern zugänglich zu machen. Ich thue dieses um so williger, als bei dieser Gelegenheit, von mir gebrauchte Methoden mir ein neues Feld von Speculationen und Untersuchungen zu eröffnen scheinen, wodurch die analytische Geometrie eine gänzlich neue Ansicht gewinnen kann.

Man wird, glaube ich, aus demj., was folgt, sehen, daß Alles, absolut Alles, in meinem Verfahren motivirt und gerechtfertigt werden kann; und daß, weit

entfernt,

entfernt meine Rechn. nur zum Gegenst. hätten, eine zum Voraus entdeckte Construktion zu legitimiren, diese Construktion vielmehr davon eine ganz natürliche Folge ist und, so zu sagen, gänzlich unausweichbar ist.

Man wird endlich sehen daß diese zwei Aufg., mit welcher so viele berühmte Geometer sich wechselsweise beschäftigt haben, durch die von mir dabei angewandten Methoden Aufg. von der höchsten Leichtigkeit werden, die bequem, selbst in den gemeinsten Elementar-Werken ihre Stelle finden können.

Da überdem der Gang der Schlüsse und der Rechnungen durchaus für beide Aufg. derselbe ist, so werde ich mich hier einzig nur mit der ersten beschäftigen. Die andere kann dem Leser ein Mittel darbieten, sich zu versichern, ob er das Verfahren gut gefaßt habe.

Er könnte sich ebenfalls durch die Aufg. üben, welche erfordert, auf einer Kugel einen Kreis zu finden, der drei andere auf derselben Kugel gegebene Kreise berührt; eine Aufg., die ich nach den nämlichen Methoden Seite 349, IV. Bd. der Annalen behandelt habe.

Es seien c, c′, c″ drei in einerlei Ebene der Größe und Lage nach gegebene Kreise. Laßt uns die Aufg. vorlegen, einen vierten Kreis C zu finden, der zugleich jene drei berührt.

Es stellt sich ziemlich natürlich dar, den Mittelp.

und den Halbm. des geforderten Kreises zu suchen. Aber, da man einen Kreis durch drei gegebene Punkte sehr leicht beschr. weiß, so stellt sich auch ziemlich natürlich dar, drei Punkte von der Peripherie dieses Kreises zu suchen. Wir werden selbst sogleich sehen, daß dieses letzte Mittel der Auflösung den Vorzug vor dem ersten verdient.

Unter den Punkten der Peripherie der gesuchten Kreise, giebt es deren drei, die sich ganz besonders bemerkbar machen: t, t', t'', wo diese Peripherie durch die drei gegebenen Kreise berührt werden soll; dieses sind also die Punkte von dieser Peripherie, die wir natürlicherweise aufgefordert sind zu entdecken.

Unsere Aufgabe findet sich also auf folgende zurückgeführt:

Wenn drei Kreise c, c', c'' in einer Ebene der Größe und Lage nach gegeben sind, zu bestimmen, in welchen Punkten t, t', t'' sie alle zugleich durch einen vierten Kreis C berührt werden sollen.

Es ist aber nicht schwer zu sehen, daß, wenn man nur den Berührungspunkt von C mit irgend einem der gegebenen Kreise zu finden weiß, und successive das nämliche Verfahren für jeden dieser Kreise wiederholt, die Aufgabe gelöst sein.

Vermittelst dieser Bemerkung wird unsere Aufg. sich auf folgende reducirt finden.

Wenn drei Kreise c, c′, c″ in einerlei Ebene der Größe und Lage nach gegeben sind, zu bestimmen, in welchem Punkt einer von ihnen berührt wird von einem vierten Kreis C, der sie alle drei berührt.

Es ist leicht uns jetzt über den Werth der zwei Arten von Auflösungen, die wir zuerst angezeigt haben auszusprechen.

Um zu der vollständigen Aufl. einer Aufg. zu gelangen, ist es unausweichbar, eine gewisse Anzahl von Operationen auszuführen, die von der Natur dieser Aufgabe abhangen und die man mit aller möglichen Geschicklichkeit nicht würde unbestimmt abkürzen und reduciren können.

Sobald man aber den Mittelp. und den Halbm. der gesuchten Kreise hat, so ist die Aufg. fast gelöst; folgl. muß die Aufsuchung dieses Mittelp. und dieses Halbm. die ganze Summe von Construktionen zählen, welche die so weit als möglich vereinfachte Aufgabe fordern kann.

Im Gegentheil, wenn wir die Berührungspunkte des gesuchten Kreises mit den drei gegebenen Kreisen haben, so würde die Aufg. noch nicht vollst. gelöst seln; und es bliebe uns noch übrig, durch drei gegebene Punkte einen Kreis zu beschreiben. Man muß mithin, um bis dahin zu gelangen, weniger machen, als

bis zur vollständigen Aufl. der Aufg. zu kommen. Endlich also muß es leichter sein, die Berührungspunkte des gesuchten Kreises mit den drei gegebenen Kreisen zu finden, als es sein würde, den Mittelp. und den Halbm. dieses Kreises zu finden.

Um so mehr müßte es leichter sein, einen von diesen Berührungspunkten als sie alle drei zu finden, weil, ist dieser Punkt gefunden, man alsdann nur den dritten Theil von der zur Auffindung aller drei P. erforderlicher Construkt., ausgeführt haben wird; nun, wenn sie bekannt sind, die Aufg. noch nicht vollständig gelöst ist, so kann man mit vieler Wahrscheinlichkeit vermuthen, daß die Auflösung der Einen selbst nicht den dritten Theil von der ganzen Verwickelung der vorgelegten Aufg. begreifen wird *).

*) Man kann als Princip aufstellen, daß überhaupt es um so leichter sein muß, eine Aufg. auf eine andere zurückzuführen, als die Aufl. von dieser schwieriger ist; vorausgesetzt, daß die letztere, wenn es erlaubt ist, sich so auszudrücken, sich auf dem Wege der erstern befindet. So ist es z. B. viel leichter, von Dünkirchen nach Amiens als von Dünkirchen nach Collioure zu gehen, weil sich Amiens auf dem Wege von Dünkirchen und sehr weit von dieser letzten Stadt befindet. Aber, obgleich Berlin sehr weit von Collioure ist, so ist es doch weit kürzer, von Dünkirchen nach Collioure als von Dünkirchen nach Berlin zu gehen; weil Berlin gänzlich außerhalb des Weges liegt, welcher diese beiden Städte verbindet.

Wir wollen uns also mit der Aufsuchung des unkts c'' beschäftigen, in welchem der Kreis C den reis c'' berührt.

Ein Punkt ist auf einer Ebene bestimmt, wenn an zwei Linien, gerade oder krumme, kennt, auf welchen er sich befinden muß.

Was den Punkt c'' betrifft, so kennen wir bereits ie solche Linie; es ist der Umfang c''; es bleibt also er noch die Frage, eine andere zu finden.

Unsere Aufg. findet sich also auf die folgende rückgebracht:

Wenn drei Kreise c, c', c'' der Größe und Lage ch auf einer Ebene gegeben sind, eine Linie zu finen, welche sie in dem Punkte c'' schneidet, wo er von em vierten Kreis C berührt wird, der zugleich e drei ersten berührt.

Aber es ist wesentlich, zu bemerken, daß diese zte Aufg. unbestimmt ist, weil einerlei Punkt auf endlich verschiedene Arten durch den Durchschnitt eier Linien bestimmt sein kann. Dies ist auf die

Wenn Viele und Newton sehr einfach dahin gekomn sind, die uns beschäftigende Aufg. auf die zurückzuhren, wo verlangt wird, einen Kr. zu beschreiben, der, dem er durch einen gegebenen Punkt gehet, zwei andere gebene Kreise berührt, so hat dieses seinen Grund darin, ß diese letztere Aufg. fast eben so schwer aufzulösen ist s die erste.

auswendig berührt wird (Aufg. VI). Es sei m''' der Mittelp. und R der Halbm. dieses Kreises.

Beschr. man nun um m''' mit $R - r$ einen Kr., so ist dieser der gesuchte.

Beweis. Der letzte Kreis muß nach Lehns. 4 die drei gegebenen Kreise auswendig berühren.

f) Wenn $K = K'$ aber $K'' < K$, und K'' von den drei gegebenen Kreisen inwendig berührt werden soll.

Aufl. Man beschr. um m und m' mit $r - r''$ die Kr. k, k. Alsdann beschr. man einen Kreis, der durch m'' geht, und von den Kreisen k, k inwendig berührt wird (Aufg. VI); sein Halbm. sei R und sein Mittelp. m'''. Aus m''' beschr. man mit $R + r''$ einen Kr., so ist dieser der gesuchte Kr. K'''.

Beweis. Nach dem 6. Lehnsatz muß K''' von den drei gegebenen Kreisen inwendig berührt werden.

g) Wenn die drei gegebenen Kreise K, K', K'' ungleich sind und sie den gesuchten Kreis auswendig berühren sollen.

Aufl. Es sei K der kleinere Kreis. Man beschr. aus m' mit $r' - r$ und aus m'' mit $r'' - r$ Kreise k, k'. Nun beschr. man einen Kreis k'', der durch m geht und von den Kreisen k, k' auswendig berührt wird (Aufg. VI). Der Halbm. dieses Kreises

sei m''' und der Halbm. R. Endlich beschr. man um m''' mit R — r einen Kreis, so ist dieser der gesuchte Kreis K'''

Beweis. Uebergehe ich seiner Leichtigkeit wegen.

h) Wenn die drei gegebenen ungleichen Kreise, den gesuchten inwendig berühren sollen.

Aufl. Es sei K der kleinere. Man beschr. um m' mit r'—r und um m'' mit r''—r Kreise k, k'. Alsdann beschr. man einen Kr. k'', der durch m geht u. von den Kr. k, k' inwendig berührt wird (Aufg. VI). Der Halbm. von k'' sei R und der Mittelpunkt m'''. Um diesen Mittelpunkt m''' beschr. man ferner mit R+r einen Kreis, so ist dieser der verlangte Kr. K'''.

Beweis. Wie vorher.

i) Wenn zwei von den drei Kreisen den gesuchten auswendig, der dritte K'' aber ihn inwendig berühren soll.

Aufl. Aus m beschr. mit r+r'' einen Kreis k und um m' mit r'+r'' einen Kreis k'. Jetzt beschr. man einen Kreis k'' der durch m'' geht und von den Kreisen k, k' auswendig berührt wird (Aufg. VI). Der Mittelp. dieses Kreises sei m''' und sein Halbm. R. Um m''' beschr. endlich mit R+r'' einen Kreis; dieser ist alsdann der verlangte Kreis K'''.

Beweis. Ist eben so leicht wie bei dem vorhergehenden Fall.

k) Der gesuchte Kreis K''' soll von zwei Kreisen K, K' inwendig und von dem Kreis K' auswendig berührt werden.

Aufl. Um m beschr. mit $r + r''$ und um m' mit $r' + r''$ Kreise k, k'. Nachgehends beschr. nach (Aufg. VI) einen Kreis k'', der durch m'' geht und die Kreise k, k' inwendig berührt. Es sei R der Halbm. und m''' der Mittelp. dieses Kreises; beschr. man nun mit $R - r''$ einen Kr., so ist dieser der verlangte Kr. K'''.

Beweis. (Lehnsatz 4) berührt der Kreis K'' den Kreis K''' auswendig, und (Lehnsatz 6) berühren die Kreise K, K' den Kreis K''' inwendig. Es ist also K''' der verlangte Kreis.

Die folgende analytisch Aufl. verdient ihrer Eleganz, Einfachheit und Eigenthümlichkeit wegen bekannt zu sein, daher ich hier die Uebersetzung mittheile.

Analytiſche Auflöſung

r Aufgabe: einen Kreis zu finden, der drei andere einer Ebene liegende Kreiſe berührt, von Herrn ergonnen. (Annales de mathématiques Tom. VII. Pag. 289 — 303.) Nismes 1817 in 4to.

---

s ſind ungefähr drei Jahre, als die Turiner Akamie eine Abhandlung drucken lies, die ich derſelben der Abſicht zugeſandt hatte, um vollſtändig die alytiſche Geometrie wegen des Vorwurfs zu rächen, n man ihr nur zu oft macht, daß ſie ſich nicht mit r reinen Geometrie, für die Conſtruktion der Aufben, in Wettſtreit einlaſſen könnte. Ich verſuchte beweiſen, daß dieſe analytiſche Geometrie, ſchickh behandelt, die directeſten, zierlichſten und einchſten Auflöſungen von den ſeit längerer Zeit behmten und für ſchwer gehaltenen zwei Aufgaben rbietet; ich ſpreche nämlich von der Aufg., wo es rauf ankommt: einen Kreis zu beſchreiben,

der drei gegebene Kreise berührt; u. von der, wo die Frage ist eine Kugel zu beschr., welche vier gegebene Kugeln berührt.

Ich schrieb für vollendete Geometer und glaubte, kurz sein zu müssen. Es scheint, daß ich ein wenig zu kurz war. Mehrere Geometer, die meine Abhandlung kannten, machten mir diesen Vorwurf, der wahrscheinlich seinen Grund darin fand, daß der Faden, der mich geleitet hatte, darin nicht genug sichtbar war, und daß meine Rechnungen eher geeignet scheinen eine durch einen glücklichen Zufall gefundene Construktion zu legitimiren als zu dienen, diese Constr. zu entdecken.

Es scheint selbst, daß, als Folge eines übertriebenen Laconismus, viele Geometer meinen Methoden nicht haben folgen und den Geist davon auffassen können.

Dieses bestimmt mich jetzt, denselben Gegenstand wieder vorzunehmen, in der Absicht, ihn mehr zu entwickeln und ihn den Anfängern zugänglich zu machen. Ich thue dieses um so williger, als bei dieser Gelegenheit, von mir gebrauchte Methoden mir ein neues Feld von Speculationen und Untersuchungen zu eröffnen scheinen, wodurch die analytische Geometrie eine gänzlich neue Ansicht gewinnen kann.

Man wird, glaube ich, aus dem, was folgt, sehen, daß Alles, absolut Alles, in meinem Verfahren motivirt und gerechtfertigt werden kann; und daß, weit

entfernt,

entfernt meine Rechn. nur zum Gegenst. hätten, eine zum Voraus entdeckte Construktion zu legitimiren, diese Construktion vielmehr davon eine ganz natürliche Folge ist und, so zu sagen, gänzlich unausweichbar ist.

Man wird endlich sehen daß diese zwei Aufg., mit welcher so viele berühmte Geometer sich wechselsweise beschäftigt haben, durch die von mir dabei angewandten Methoden Aufg. von der höchsten Leichtigkeit werden, die bequem, selbst in den gemeinsten Elementar-Werken ihre Stelle finden können.

Da überdem der Gang der Schlüsse und der Rechnungen durchaus für beide Aufg. derselbe ist, so werde ich mich hier einzig nur mit der ersten beschäftigen. Die andere kann dem Leser ein Mittel darbieten, sich zu versichern, ob er das Verfahren gut gefaßt habe.

Er könnte sich ebenfalls durch die Aufg. üben, welche erfordert, auf einer Kugel einen Kreis zu finden, der drei andere auf derselben Kugel gegebene Kreise berührt; eine Aufg., die ich nach den nämlichen Methoden Seite 349, IV. Bd. der Annalen behandelt habe.

Es seien c, c′, c″ drei in einerlei Ebene der Größe und Lage nach gegebene Kreise. Laßt uns die Aufg. vorlegen, einen vierten Kreis C zu finden, der zugleich jene drei berührt.

Es stellt sich ziemlich natürlich dar, den Mittelp.

und den Halbm. des geforderten Kreises zu suchen. Aber, da man einen Kreis durch drei gegebene Punkte gl. beschr. weiß, so stellt sich auch ziemlich natürlich dar, drei Punkte von der Peripherie dieses Kreises zu suchen. Wir werden selbst sogleich sehen, daß dieses letzte Mittel der Auflösung den Vorzug vor dem ersten verdient.

Unter den Punkten der Peripherie der gesuchten Kreise, giebt es deren drei, die sich ganz besonders bemerkbar machen: t, t', t'', wo diese Peripherie durch die drei gegebenen Kreise berührt werden soll; dieses sind also die Punkte von dieser Peripherie, die wir natürlicherweise aufgefordert sind zu bestimmen.

Unsere Aufgabe findet sich also auf folgende zurückgeführt:

Wenn drei Kreise c, c', c'' in einer Ebene der Größe und Lage nach gegeben sind, zu bestimmen, in welchen Punkten t, t', t'' sie alle zugleich durch einen vierten Kreis C berührt werden sollen.

Es ist aber nicht schwer zu sehen, daß, wenn man nur den Berührungspunkt von C mit irgend einem der gegebenen Kreise zu finden weiß, und successive das nämliche Verfahren für jeden dieser Kreise wiederholt, die Aufgabe gelöst sein.

Vermittelst dieser Bemerkung wird unsere Aufg.) auf folgende reducirt finden.

Wenn drei Kreise c, c′, c″ in einerlei Ebene der röße und Lage nach gegeben sind, zu bestimmen, in elchem Punkt einer von ihnen berührt wird von em vierten Kreis C, der sie alle drei berührt.

Es ist leicht uns jetzt über den Werth der zwei ten von Auflösungen, die wir zuerst angezeigt ha- n auszusprechen.

Um zu der vollständigen Aufl. einer Aufg. zu ge- ngen, ist es unausweichbar, eine gewisse Anzahl von perationen auszuführen, die von der Natur dieser ufgabe abhangen und die man mit aller möglichen eschicklichkeit nicht würde unbestimmt abkürzen und ouciren können.

Sobald man aber den Mittelp. und den Halbm. r gesuchten Kreise hat, so ist die Aufg. fast gelöst; lgl. muß die Aufsuchung dieses Mittelp. und dieses albm. die ganze Summe von Construktionen zählen, elche die so weit als möglich vereinfachte Aufgabe rdern kann.

Im Gegentheil, wenn wir die Berührungspunkte s gesuchten Kreises mit den drei gegebenen Kreisen ben, so würde die Aufg. noch nicht vollst. gelöst in; und es bliebe uns noch übrig, durch drei gege- ne Punkte einen Kreis zu beschreiben. Man muß ithin, um bis dahin zu gelangen, weniger machen, als

bis zur vollständigen Aufl. der Aufg. zu kommen. Endlich also muß es leichter sein, die Berührungspunkte des gesuchten Kreises mit den drei gegebenen Kreisen zu finden, als es sein würde, den Mittelp. und den Halbm. dieses Kreises zu finden.

Um so mehr müßte es leichter sein, einen von diesen Berührungspunkten als sie alle drei zu finden, weil, ist dieser Punkt gefunden, man alsdann nur den dritten Theil von der zur Auffindung aller drei P. erforderlicher Konstrukt., ausgeführt haben wird; nun, wenn sie bekannt sind, die Aufg. noch nicht vollständig gelöst ist, so kann man mit vieler Wahrscheinlichkeit vermuthen, daß die Auflösung der Einen selbst nicht den dritten Theil von der ganzen Verwickelung der vorgelegten Aufg. begreifen wird *).

*) Man kann als Princip aufstellen, daß überhaupt es um so leichter sein muß, eine Aufg. auf eine andere zurückzuführen, als die Aufl. von dieser schwieriger ist; vorausgesetzt, daß die letztere, wenn es erlaubt ist, sich so auszudrücken, sich auf dem Wege der erstern befindet. So ist es z. B. viel leichter, von Dünkirchen nach Amiens als von Dünkirchen nach Collioure zu gehen, weil sich Amiens auf dem Wege von Dünkirchen und sehr weit von dieser letzten Stadt befindet. Aber, obgleich Berlin sehr weit von Collioure ist, so ist es doch weit kürzer, von Dünkirchen nach Collioure als von Dünkirchen nach Berlin zu gehen; weil Berlin gänzlich außerhalb des Weges liegt, welcher diese beiden Städte verbindet.

Wir wollen uns alſo mit der Aufſuchung des unkts c'' beſchäftigen, in welchem der Kreis C den reis c'' berührt.

Ein Punkt iſt auf einer Ebene beſtimmt, wenn an zwei Linien, gerade oder krumme, kennt, auf elchen er ſich befinden muß.

Was den Punkt c'' betrifft, ſo kennen wir bereits ne ſolche Linie; es iſt der Umfang c''; es bleibt alſo r noch die Frage, eine andere zu finden.

Unſere Aufg. findet ſich alſo auf die folgende rückgebracht:

Wenn drei Kreiſe c, c', c'' der Größe und Lage ach auf einer Ebene gegeben ſind, eine Linie zu fin- it, welche in dem Punkte c'' ſchneidet, wo er von nem vierten Kreis C berührt wird, der zugleich e drei erſten berührt.

Aber es iſt weſentlich zu bemerken, daß dieſe zte Aufg. unbeſtimmt iſt, weil einerlei Punkt auf endlich verſchiedene Arten durch den Durchſchnitt eier Linien beſtimmt ſein kann. Dies iſt auf die

---

Wenn Viele und Newton ſehr einfach dahin gekom- en ſind, die uns beſchäftigende Aufg. auf die zurückzu- hren, wo verlangt wird, einen Kr. zu beſchreiben, der dem er durch einen gegebenen Punkt gehet, zwei andere gebene Kreiſe berührt, ſo hat dieſes ſeinen Grund darin, ß dieſe letztere Aufg. faſt eben ſo ſchwer aufzulöſen iſt s die erſte.

nämliche Weiſe, als wenn man zwei Gleichungen zwiſchen zwei unbekannten x und y hat und dieſe zwei Gleichungen auf unendlich verſchiedene Arten erſetzen kann durch das Syſtem von zwei anderen Gleichungen, welche mit ihnen zugleich Statt finden, u. folglich die nämlichen Werthe für die beiden Unbekannten geben *).

Wir wollen die gegebenen Größen und die Unbekannten der Aufg. auf zwei rechtw. Axen beziehen. Trachteten wir nur nach der größtmöglichen Symmetrie, ſo würden wir dieſe Axen gänzlich beliebig annehmen. Wenn, im Gegentheil, wir nur nach Einfachheit ſtreben, ſo könnten wir den Anfangspunkt in den Mittelp. von einem unſerer Kr. ſetzen und eine der Axen durch den Mittelp. von einem der beiden andern Kreiſe legen.

Um aber ſo viel als möglich die Einfachheit mit der Symmetrie zu vereinigen, ſo werden wir uns be-

*) Wir ſtehen nicht an, dieſe Subſtitution von Gleichungen, der einen ſtatt der andern, auf welchen die Elementar-Bücher weit entfernt ſind ſo ſtark zu beſtehen als ſie wohl ſollten, als eins der mächtigſten Mittel der Analyſis und der Geom. anzuſehen. Sie iſt es, die insbeſondere faſt das ganze Verdienſt von der Discuſſion der L. und Flächen von der zweiten Ordnung, welche Seite 61 des V. Bandes der Annalen ausmacht, eben ſo wie von der Theorie ihrer Pole im III. Bande Seite 93 ſteht.

hränken, den Mittelp. von einem unserer Kr in den nfangsp. zu setzen, indem wir übrigens den Axen in etreff der beiden andern eine ganz beliebige Richtung eben.

Was die Wahl des Kreises betrift, welcher seinen ittelp. im Anfangsp. haben wird, so kann er nicht eifelhaft sein; und man fühlt, daß es c'' sein muß, eil er eine besondere Rolle in der Aufg., auf welche wir die vorgelegte Aufg. reducirt haben, spielt.

Es seien also r, r', r'' die respectiven Halbesser der Kreise c, c', c''; es seien a, b die Coornaten des Mittelp. von c, und es seien a', b' die s Mittelp. von c'.

Es sei R der unbekannte Halbm. des Kreises C, nd es seien A, B die unbekannten Coordinaten ines Mittelpunkts. Es seien endlich x, y die unbenannten Coordinaten des Punkts t'', wo G den Kreis berührt; welches eine erste Gleichung geben wird

$$x^2 + y^2 = r''^2 \quad (1).$$

Wir wollen, um die Ideen zu fixiren, annehen, daß alle Berührungen außerhalb sein sollen. ieserhalb müßte die Entfernung des Mittelp. von C n jedem der Kreise c, c', c'' gleich sein der Summe rer Halbm., welches geben wird.

$$(A-a)^2 + (B-b)^2 = (R+r)^2, \quad (2)$$

$$(A-a')^2 + (B-b')^2 = (R+r')^2, \quad (3)$$

$$A^2 + B^2 = (R+r'')^2; \quad (4)$$

und ſo ſind die Gleich. beſchaffen, welche die Aufg. löſen würden, wenn wir die Coord. des Mittelpunkts und den Halbmeſſer des geſuchten Kreiſes zu Unbekannten nehmen wollten.

Bevor wir weiter gehen, bemerken wir, daß, in dem Falle, wo der Kreis C einen der Kreiſe c, c′, c″ einſchließen ſoll oder davon eingeſchloſſen ſein ſoll, es der Unterſchied der Halbmeſſer nicht aber ihre Summe iſt, welche der Entfernung der Mittelpunkte gleich ſein ſollte; man müßte alſo die Zeichen von einigen der Halbm. r, r′, r″ ändern oder auch wohl irgend wo das Zeichen von R ändern. Man kann überdem bemerken, daß, da jedes der Binomen R+r, R+r′, R+r″ zum Quadrat erhoben iſt, die eine von dieſen Veränderungen der andern gleichgeltend iſt, und man ſieht, daß, wenn man auf alle mögliche Arten, die Zeichen r, r′, r″ varrirt, die Aufg. 8 Auflöſungen haben wird, wie man ſich übrigens leicht davon überzeugen kann, bemerkend, daß der geſuchte Kreis alle gegebenen Kreiſe einſchließen oder ſie außerhalb berühren kann, daß er, auf drei Arten, einen von ihnen einſchließen und die beiden andern außerh. berühren kann, u. daß er eben ſo, auf dreierlei Art, den einen von ihnen außerhalb berühren und die beiden andern einſchließen kann. Wir werden demohngeachtet bei den drei Halbm. das poſitive Zeich.

beibehalten, indem wir uns in dem Endresult erinnern, daß sie gleichgültig positiv und negativ sein können.

Wenn das Setzen einer Aufg. in einer Gleichung unmittelbar zu mehreren Gleichungen zwischen mehreren Unbek. führt so ist das Erste was man alsdann machen muß, zu untersuchen, daß, wenn man diese Gleich. unter sich auf eine schickliche Art verbindet, man davon nicht einige andere einfachere ableiten kann; denn dieses ist oft ein sehr geeignetes Mittel, die Untersuchung mit welcher man sich beschäftiget, zu vereinfachen.

Wenn man diese Reflectionen auf die Gleichungen (2, 3, 4) anwendet, so sieht man zur Stelle, daß man die beiden erstern merkwürdig vereinfachen wird, indem man ihre Differenzen mit der dritten, substituirt, welche, wenn man reducirt und versetzt, sind

$$2\,aA + 2\,bB - 2(r'' - r)R = a^2 + b^2 + (r'' - r)(r'' + r) \quad (5);$$

$$2\,a'A + 2\,b'B - 2(r'' - r)R = a'^2 + b'^2 + (r'' - r')(r'' + r') \quad (6),$$

Man kann in diesen letzteren Gleichungen noch eine recht geeignete Vereinfachung einführen die Elimination von R zwischen ihnen und der Gleich. (4) zu erleichtern. Dieses bestehet darin $R + r''$ hierein einzuführen, welche in (3) allein ist. Sie werden also

$$2aA + 2bB - 2(r'' - r)(R + r'') = a^2 + b^2 - (r'' - r)^2 \quad (7),$$

$$2a'A + 2b'B - 2(r'' - r')(R + r'') = a'^2 + b'^2 - (r'' - r')^2 \quad (8).$$

Dieſes ſind alſo mit der Gleichung (4), die einfachſten Gleichungen, die man anwenden könnte, um zu den Coordinaten des Mittelp. und zu dem Halbm. des geſuchten Kreiſes zu gelangen.

Aber dieſes ſind nicht die Coordinaten und der Halbm., welche wir uns beſtimmt haben zu unbekannten zu wählen: es ſind die Coordinaten x, y des Berührungspunktes t'' von C mit c''; zwiſchen welchen wir ſchon die Gleichung (1) haben. Suchen wir alſo dieſe neuen Unbekannten mit den Unbekannten der Gleichungen (4, 7, 8) zu verbinden, damit man dieſe letztern eliminiren kann.

Es iſt aber der Punkt t'' mit dem Anfangsp. und dem Mittelp. C in gerader Linie. Woraus folgt daß man haben muß

$$\frac{y}{x} = \frac{B}{A}. \text{ Folglich } yA = xB \quad (9).$$

Wenn man jetzt A, B, R + r'' zwiſchen den Gleichungen (4, 7, 8, 9) eliminirt, ſo wird die daraus hervorgehende Gleichung in x und y die von einer gewiſſen Linie ſein, die den gegebenen Kreis c'' im geſuchten Punkt t'' ſchneiden wird.

Wäre dieſe Gleichung zu verwickelt, ſo könnte man verſuchen, ſie zu vereinfachen mittelſt der Gleichung (1), die für den geſuchten Punkt t'' mit ihr zugleich Statt haben muß, welches darauf hinaus käme, ſtatt der geſuchten Linie eine andere einfachere Linie zu ſubſtituiren, welche, wie ſie, den Kr. c'' im Punkt t'' ſchneidet.

Nichts hindert aber, dieſe Combination ſelbſt im Laufe der Elimination vorzunehmen, damit das Reſultat davon das möglich einfachſte werde. Man kann überdies bemerken, daß wir eigentlich fünf unbekannte Glieder A, B, R, x, y haben, die durch die Gleichungen (1, 4, 7, 8, 9) verbunden ſind; und daß wir folgl. mit dieſen Gleich., die zugleich Statt haben, eine uns dienliche Combination machen können.

Aus den Gleichungen (4, 9) ziehet man

$$A = \frac{x(R + r')}{\sqrt{(x^2 + y^2)}}, \quad B = \frac{y(R + r')}{\sqrt{(x^2 + y^2)}};$$

oder einfacher, indem wir auf die Gleich. (1) Rückſicht nehmen,

$$A = \frac{x(R + r')}{r''}, \quad B = \frac{y(R + r')}{r''}.$$

Subſtituiren wir dieſe Werthe in die Gleich. (7, 8), ſo werden ſie

$$2\,[ax + by - x''(x'' - x)]\,(R + r'') =$$
$$x''[a^2 + b^2 - (x'' - x)^2];$$
$$2\,[a'x + b'y - x''(x'' - x')]\,(R + r'') =$$
$$x''[a'^2 + b'^2 - (x'' - x')^2];$$

woraus man endlich durch Elimination von $R + r''$ zieht

$$\frac{ax + by - x''(x'' - x)}{a^2 + b^2 - (x'' - x)^2} = \frac{a'x + b'y - x''(x''' - x')}{a'^2 + b'^2 - (x'' - x')^2}.$$

So iſt alſo die Gleichung von einer Linie beſchaffen, welche den Kreis c'' im geſuchten Punkt t'' ſchneidet. Da nun dieſe Gleichung nur vom erſten Grade iſt, ſo iſt die erforderliche Linie eine gerade Linie.

Aber eine gerade Linie ſchneidet einen Kr. in zwei Punkten; und es iſt daran gelegen, ehe man weiter geht, zu wiſſen, welche Aufg. dieſe zwei Punkte auflöſen. Deshalb wollen wir uns zurückrufen, daß wir unſere primitiven Gleichungen in der Hypotheſe ſo geſchrieben haben, daß alle Berührungen äußerlich ſeien u. daß wir bemerkt haben, daß man von dieſer Hypotheſe zu der andern durch bloße Aenderung der Zeichen von r, r', r'' übergeht, welches auf acht verſchiedene Arten Statt haben kann.

Es iſt aber leicht, aus der Form der Gleich. (16) zu ſehen, daß ſie ſich nicht ändert, wenn man darin die Zeichen der drei Halbm. zugleich ändert. Woraus hervorgeh., daß die acht Fälle, welche die Variationen der Zeichen dieſer drei Halbm. darſtellen, ihr nur vier

verschiedene Formen erlauben; und daß sie, unter jeder Form, zwei ganz entgegengesetzte Aufg. auflöst. Sie löst also, unter der Form, welche sie hier hat, den Fall, wo der gesuchte Kreis die drei gegebenen Kreise außerhalb berühren soll, und den Fall, wo er sie alle einschließen soll.

Man könnte jetzt, durch die Combination der Gleichungen (1, 10), zu den Werthen der Coordinaten x, y des Punktes t'' gelangen. Diese Werthe werden mit Wurzelgrößen verwickelt sein, und man wird sie durch das bekannte Verfahren construiren.

Aber wir werden sogleich sehen, daß dieses bei weitem nicht das beste zu ergreifende Mittel ist.

Wenn ein Punkt durch zwei Gleichungen zwischen seinen Coordinaten gegeben ist, so ist es, statt diese Gleichungen aufzulösen, oft unvergleichbar viel bequemer, die Linie, welche sie ausdrücken, und deren Durchschnitt den gesuchten Punkt bestimmen soll, zu construiren.

Wir können also die Aufsuchung des Punktes t'' reduciren auf die Construktion der durch die Gleichung (1, 10) vorgestellten Linien. Aber die erste ist ganz construirt da: es ist dieses die gegebene Periph. c''. Es kommt also nur darauf an, die andern zu construiren.

Um diese gerade Linie zu construiren, so könnte man die Längen der Segmente suchen, welche sie auf

die Axen macht, und nachgehends diese zwei Segmente construiren. Aber dieses ist noch nicht das beste zu ergreifende Mittel *).

Um eine gerade Linie zu constr., ist es nöthig und hinreichend, zwei Punkte von ihrer Richtung zu kennen. Man weiß überdem, daß ein Punkt in einer geraden Linie ist, wenn ihre Coordinaten die Gleichung von dieser geraden Linie identisch machen.

Folglich, wenn man zwischen x und y zwei Relationen findet, kraft deren die Gleichung von einer geraden Linie identisch wird; so werden die aus diesen Relationen abgeleiteten Werthe von x und y

*) Diejenigen, welche der Behauptung, daß die analyt. Geom. den Vorzug einfache u. zierliche Const. darbieten zu können, streitig machen, gründen sich hauptsächlich darauf, daß welche Aufmerksamkeit man auch anwende die Coordinaten-Axen gut zu wählen, diese Axen doch öfter der aufzulösenden Aufg. gänzlich fremd sind.

„Es sei, sagen sie z. B. die Aufg., einen Kreis zu „beschreiben, der zugleich drei gegebene Kreise berühre. „Die natürlichen Data der Aufg. sind die Halbm. der „gesuchten Kreise, und die Entfernungen zwischen ihren „Mittelpunkten zu zwei und zwei genommen; ihre „natürlichen Unbekannten sind der Halbm. des gesuch„ten Kreises und die Entfernungen seines Mittelp. von „den Mittelp. der gegebenen Kreise.“

„Aber statt der Entfernungen zwischen den Mit-

die Coordinaten eines Punkts von dieſer geraden Linie ſein.

Man hat zwei ſehr einfache Arten, die Gleichung 10 identiſch zu machen. Die erſte iſt, ihre beiden Hälften gleich Null anzunehmen; die zweite iſt, ſie gleich Eins zu machen.

Man erhält alſo die zwei Paare von Gleichungen

$$\begin{cases} ax + by = r''(r'' - r) & (11), \\ a'x + b'y = r''(r'' - r') & (12). \end{cases}$$

$$\begin{cases} a(x - a) + b(y - b) = r(r'' - r) & (13), \\ a'(x - a') + b'(y - b') = r'(r'' - r') & (14). \end{cases}$$

Die aus den Gleichungen (11, 12) abgeleiteten Werthe von x und y ſind folglich die Coordinaten eines Punktes von der geraden Linie (10), und eben

„telpunkten ſubſtituirt die analytiſche Geometrie ihre „Coordinaten, welche gekünſtelte und willkührliche „Data und Unbekannte ſind, und davon kommt die „Complication der Conſtruktion, die man daraus ab„leitet.“

Wir geben dieſes Alles gerne zu. Aber deshalb achten wir die aus der analytiſchen Geometrie abgeleiteten Conſtrutionen nur gut, in ſo weit man dahin gekommen iſt, ſie von der Lage der Axen unabhängig zu machen. Deshalb bemühen wir uns durch Beiſpiele zu beweiſen, daß die analytiſche Geometrie, ſchicklich angewandt, allezeit dergleichen darbietet; und daß ſie alsdann an Zierlichkeit und Einfachheit denen der reinen Geometrie oder elbſt demj., was Herr Carnot vermiſchte Geometrie nennt, höchſt überlegen iſt.

so ist es mit den aus den Gleichungen (13, 14) abgeleiteten Werthen von x und y.

Man könnte also diese zwei Systeme von Werthen suchen und sie construiren; man würde so zwei Punkte von der geraden Linie (10) haben, welche sich hierdurch vollständig fände. Aber man kann es noch besser machen.

Um den Punkt durch die Gleichungen (11, 12) zu bestimmen, ist das Beste, die gerade Linie, welche diese zwei Gleichungen vorstellen, und die durch ihren Durchschnitt den gesuchten Punkt bestimmen werden, zu construiren. Man kann dasselbe von dem durch die Gleichungen (13, 14) gegebenen Punkte sagen, welcher kein anderer ist als der Durchschnitt der geraden Linien, welche die zwei Gleichungen vorstellen. Alles reducirt sich also darauf, zu wissen, welches die vier gerade Linien sind, welche die Gleichungen (11, 12, 13, 14) vorstellen.

Da es aber übrigens evident ist, daß die gerade Linien (12, 14) in Bezug auf die Kr. c', c'' eben so liegen als die geraden Linien (11, 13) in Bezug auf die Kr. c, c'', so wird es hinlänglich sein, uns mit diesen letztern zu beschäftigen, welche man übrigens als gerade unter sich prlle. Linien und perpendikular zu der geraden Linie, welche die Mittelp. der zwei Kreise verbindet, erkennt.

Wir können überdem bemerken, daß die Gleichung

chung (11) die Gleichung (13) wird, wenn man darin respective x und y in $a \pm x'$ und $b \pm y$ verwandelt und unter sich die beiden Halbm. r, r', r'' permutirt, woraus leicht zu schließen, daß die gerade Linie (13) in Betreff des Kreises c das ist, was die gerade L. (11) in Bezug auf den Kreis c'' ist. Alles kommt also darauf an, zu wissen, welches diese letztere gerade Linie sei.

Man weiß, daß wenn man in der Peripherie des Kreises c'' einen Punkt nimmt, dessen Coordinaten x', y' durch die Relation

$$x'^2 + y'^2 = r''^2 \qquad (m)$$

verbunden sind. Die Gleichung der Tangente in diesem Punkt des Kreises ist

$$xx' + yy' = r''^2 \text{ oder } y = -\frac{x'}{y'}x + \frac{r''^2}{y'},$$

und diese Tangente ist unbestimmt, weil x' und y' nur durch die Gleichung (m) verbunden sind. Wenn man, um sie zu bestimmen, will, daß sie auch den Kreis c berühre, so muß man ausdrücken, daß der Perpend., welcher aus dem Mittelp. auf sie gefällt worden, gleich ihrem Halbmesser ist, welcher geben wird

$$\frac{b + \frac{x'}{y'}a - \frac{r''^2}{y'}}{\sqrt{\left[1 + \frac{x'^2}{y'^2}\right]}} = r \quad \text{oder} \quad \frac{ax' + by' - r''^2}{\sqrt{(x'^2 + y'^2)}} = r,$$

aber, wenn man Rücksicht auf die Gleich. (m) nimmt,

$$ax'' + by'' = x''(x'' - x) \qquad (n).$$

Also dadurch, daß man die Gleichungen (m, n) unter sich verbindet, erhält man die Coordinaten des Punktes, wo die gemeinschaftliche Tangente an c und an den Kreis c'' berührt; und, weil die Gleichung (m) vom 2ten Grade ist, so wird es zwei solche Punkte geben und folgl. auch zwei Berührungspunkte.

2. Ohne statt die Gleichungen (m, n) aufzulösen, wird es auf eins herauskommen, und es wird bequemer sein, die zwei L., welche sie ausdrückt, zu construiren, deren Durchschnitte die verlangten Berührungspunkte geben werden; weil also die eine (m) der Kreis c'' selbst ist, muß die andere (n), welche vom 1sten Grade ist, die von einer geraden Linie sein, welche die Punkte, wo er von der gemeinsch. Tang. des Kreises berührt ist, verbindet. Nun ist (n) dasselbe als (11); es ist also (11) die Gleichung der Berührungssehne mit c'' der gemeinschaftlichen Tangenten an c und c''; mithin ist (13) die Gleichung von der Berührungssehne der nämlichen Tangenten mit c; folgl. sind endlich (12) und (14) die Berührungssehnen mit c'' und c der gemeinschaftlichen Tangenten an diesen zwei Kreisen.

Die Constr. der Aufgabe reducirt sich also darauf.

Es seien die gemeinsch. äußern Tang. an unsern drei Kreisen zu zwei und zwei genommen, und die

Berührungssehnen von diesen drei Tang. mit jedem der Kreise gezogen. Die zwei Berührungssehnen auf c werden sich in M schneiden und ihre Prllen. auf c' und c'' in N' schneiden. Die zwei Berührungssehnen auf c' werden in M' u. ihre Prll. auf c'' u. c in N schneiden. Die zwei Berührungssehnen auf c'' werden sich in M'' u. ihre Prll. auf c u. c' in N'' schneiden.

Es seien MN, M'N', M''N'' gezogen. MN wird c in t und t' schneiden; M'N' wird c' in t' und t'' schneiden; und M''N'' wird c'' in t'' und t schneiden. Legt man nachgehends zwei Kreise, den einen durch t, t', t'', den andern durch ϑ, ϑ', ϑ'', so werden diese zwei Kreise die Beding. der Aufg. erfüllen.

Man kann überdem bemerken, daß die Mittelp. dieser zwei Kreise leicht zu bestimmen sein werden; denn sie werden sich in dem Durchsch. der aus den Mittelp. der gegebenen Kreise, es sei zu den drei P. t, t', t'', es sei zu den drei Punkten ϑ, ϑ', ϑ'' gezogenen geraden Linien befinden.

Man wird sich nach dem oben Gesagten leicht überzeugen, daß, um die sechs andern Aufl., deren die Aufg. fähig ist, zu erhalten, es nur bedarf, von den äußerern Tangenten die Paare Tangenten zu subst., die sich zwischen den beiden von ihnen zugleich berührten Kreisen durchkreuzen.

Vergebens wird man entgegnen, daß, wenn zwei gegebene Kreise in einander sind, ganz oder zum Theil

so sind diese Constr. fehlerhaft, weil sie alsdann keine gemeinsch. innere Tang. mehr haben, und sie können selbst keine äußeren haben. Man kann in der That bemerken, daß alsdann selbst die geraden Linien (11, 12, 13, 14) deshalb nicht aufhören, reell zu sein, und können immer constr. werden. Man kann selbst die geraden Linien (11, 13) unabhängig von aller Betrachtung von Tangenten definiren, indem man sagt, es sind Sehnen, die als gemeinsch. Pol den gleichliegenden Mittelp. von c und c'' haben.

Man kann die Constr., auf welche wir so eben gekommen sind, auf folgende Art ein wenig modificiren.

Statt die beiden Seiten der Gleichung (10) gleich der Einheit anzunehmen, so kann man sie gleich 2 setzen; welches geben wird

$$\begin{cases} 2ax + 2by - a^2 - b^2 = r''^2 - r^2 & (15), \\ 2a'x + 2b'y - a'^2 - b'^2 = r''^2 - r'^2 & (16); \end{cases}$$

Gleichungen, welche die Gleichungen (13, 14) ersetzen könnten, und die man leicht (Annales, tom. VI., pag. 329) für die der Radical-Axen erkennen wird, sowohl die beiden Kr. c u. c'' als auch von den beiden Kr. c', c''; der Punkt, den sie bestimmen werden, wird also der Radical-Mittelp. der drei Kr. sein und wir werden ihn durch O vorstellen.

Man könnte also durch die Aufsuchung dieses Punktes O die der Punkte N, N', N'' ersetzen; dergestalt, daß, wenn man bloß OM, OM', OM''

ht, ſie auf c, c', c'' die ſechs P, t, δ, t', δ', , δ'' beſtimmen werden.

Dieſes beweiſt überdem, daß die Linien MN, 'N', M''N'' in einem Punkt zuſammen laufen, der r Radical-Mittelp. dieſer drei Kreiſe iſt.

Dieſe zweite Conſtr. iſt wohl nicht einfacher als e erſte; ſie hat aber den Vorzug vor ihr, daß ſie h buchſtäblich auf die Aufſuchung eines Kreiſes an- enden läßt, der drei andere auf der Oberfläche einer ugel berührt. (Siehe Annales tom. IV, pag. 349.)

Aus dieſem Allem wird man auch die Conſtr. der andern Aufg. von Viete ableiten, indem man ſucc. e Halbm. der Kreiſe, Null oder unendlich annimmt.

Gerade auf dieſelbe Art und durch die nämlichen rincipien wird man die Kug. behandeln, wo die rage iſt: eine Kug. zu beſchr., welche vier andere, e im Raume beliebig liegen, berührt. Man gelangt ganz analogen Conſtruktionen.

Die folgende Abhandlung des Herrn Gergonne in der vorhergehenden Abhandlung erwähnt wor- n und verdient ihren Platz hier.

Aufſuchung des Kreiſes, der drei andere if einer Kugel berührt (Annales T. IV. p. 349).

In einer vor einiger Zeit der Turiner Akademie erſandten Abhandl. habe ich aus einer ſehr kurzen einfachen Analyſe die zwei folgende Sätze abgeleitet:

eine gerade Linie verbindet, ſo werden die Durchſchnitte P, Q dieſer geraden Linie mit der Kugel S die Punkte ſein, wo dieſe Kugel durch zwei Kugeln berührt wird, die zugleich die vier Kugeln S, S′, S″, S‴ berühren und zwar alle viere auf einerlei Art berühren d. h. alle vier einſchließt oder alle vier außerhalb berühren.

Es iſt klar, daß dieſe Sätze die directe Aufl. derſ. ufg. geben, wo verl. wird, einen Kr. zu beſchr., der rei gegeb. Kr. berührt, oder eine Kug. zu beſchr., die 4 gegeb. Kug. berührt; wenigſtens wenn man verlangt, daß ſe drei Kreiſe oder die vier gegeb. Kugeln auf einer i Art durch den Kreis oder durch die geſuchte Kugel rührt ſeien. Ich habe aber in der erwähnten Abhandl. zeigt, daß wenn man eine ſchickliche Combination der 3, u. der innerlich umſchr. Kegeln mit den Winkeln id äußerlich umſchriebenen Kegeln macht, man durch n ähnliches Verfahren die acht Kreiſe erhalten könn, welche zugleich die drei gegebene Kreiſe berühren nnen, und die ſechszehn Kugeln, die zugleich vier gebene Kugeln berühren können. Ich habe außerm unterſucht, was die Berührungsſehnen und die benen der Berührungsl. werden, wenn die Halbmeſſer n einigen der gegeb. Kr. oder Kugeln Null oder endlich würden, und ich habe ſo das Mittel aufſtellt, alle Aufg. von Viete über die Berührung der reiſe, und die von Fermat über die Berührung

[illegible] Kugeln auf ein gleichförmiges und leicht zu behal-
tendes Verfahren zurück zu führen.

Die durch die Analyse ganz natürliche u. zierliche Einfachheit dieser Auflösungen ließ mich wünschen, daß diej., welche relativ zu drei in einer Ebene gegebenen Kreisen sind, sich gleichfalls auf drei auf einer Kugel gegebenen Kreisen anwenden ließen *); die Analogie hatte mich sogar vermuthen lassen, daß es so sein müßte. Die Rechnung hat mir gezeigt, daß ich in dieser Rücksicht in Irrthum war; aber zur Genugthuung hat er mir für drei auf einer Kugel gegebene Kreise Construktionen geliefert, die leicht auf drei in einer Ebene gegebene Kreise und selbst auf drei im Raum gegebene Kugeln übertragen werden können; und die nicht complicirter sind als die, welche ich so eben summarisch angezeigt habe; so daß ich für die Aufg. der einen oder der andern Art diese vollkommene Einförmigkeit, nach welcher ich hauptsächlich trachtete, endlich erhalten habe.

Bevor ich in das Detail der Modification eingehe, die ich meine ersten Construktionen erleiden ließ, um sie auf drei auf einer Kugel gegebene Kreise anwendbar zu machen, muß ich zuerst einige

*) Carnot, Seite 415 seiner Géometrie de position hat den Entwurf von einer analytischen Aufl. dieser Aufg. gegeben. Siehe auch die Correspondance sur l'école polytechnique. Tom. III. No. 1. Janvier 1814, pag. 18[illegible]

merkungen vorlegen, die geeignet sind, ihr Verhen zu erleichtern.

Man weiß, daß nichts leichter ist, als die Gleich. n der gemeinsch. Sehne zweier Kreise, deren Gleich. geben sind, zu erhalten. Da diese Gleich. rational ist, folgt hieraus, daß die gr. L., zu der sie gehört, ll ist, selbst dann, wenn die zwei P., die deren Lage stimmen sollen, imaginair sind d. h. daß zwei in erlei Ebene gezogene Kreise noch eine gemeinsch. ehne haben, selbst dann, wenn sich die Kreise nicht)neiden.

Dieses ist die, welche Gaultier de Tours adicalaxen der zwei Kreise genannt hat *)

Man wird eben so leicht durch die Analysis und st ohne Rechnung beweisen, daß, wenn drei Kreise einerlei Ebene gezogen sind, sie mögen sich schneid. er nicht schneiden, ihre Radicalaxen oder gemeinsch. ehnen zwei und zwei in einerlei Punkt zusammenufen, den Gaultier ihren Radical-Mittelunkt genannt hat **).

Nichts ist leichter, wie man sieht, als die Radilaxe oder gemeinsch. Sehne von zwei Kreisen, die ch schneiden, zu bestimmen. Wenn im Gegentheil

*) Siehe das XVI. Cahier de Journal de l'école olytechnique.

**) Dasselbe Werk.

die zwei Kreise sich nicht schneiden, so ist es eben nicht schwieriger. In der That, wenn man willkührlich einen dritten Kreis beschr., der zwei Kreise zugleich schneidet, so wird er mit ihnen zwei Sehnen gemein haben, und es gehet aus dem, was wir so eben über den Radical-Mittelp. gesagt haben, hervor, daß der Treffpunkt dieser zwei Sehnen ein Punkt der Radicalaxe von den zwei gegebenen Kreisen ist; und da man überdem weiß, daß diese Axe zu der geraden Linie, welche die Mittelp. verbindet, perpendikular sein muß, so wird er gänzlich bestimmt sein.

Außerdem wird man es vielleicht bequemer in der Ausübung finden, einen zweiten Punkt von dieser Axe zu suchen, durch ein ähnliches Verfahren, wodurch man den ersten gefunden hat.

Weiß man demnach die Radicalaxe von zwei Kr. zu finden, selbst dann, wenn sie sich nicht schneiden, so wird die Aufsuchung des Radical-Mittelp. von drei Kreisen, selbst in dem Falle, wo sie sich nicht schneiden, keine weitere Schwierigkeit darbieten.

Dieses Alles kann leicht auf Kugeln im Raume ausgedehnt werden. Also ist die Ebene des Kreises, der zwei Kugeln gemein ist, welche Ebene noch ihr Dasein hat, wenn diese Kugeln sich nicht schneiden, ihre Radical-Ebene.

Man bestimmt vier dieser Ebene angehörige gerade Linien, wenn man eine Kugel constr, welche die

zwei gegebene Kugeln zugleich schneidet und die Durchschnittsebene verlängert, bis sie sich schneiden. Um diese Ebene gänzlich zu bestimmen, so kann man gleichgültig entweder eine neue gerade Linie, die darin liegt, bestimmen, oder durch einen beliebigen Punkt der ersten eine perpend. Ebene zu der geraden Linie, welche die Mittelp. verbinden führen.

Wenn im Raume drei Kugeln coexistiren, so werden sie, wenn man sie zwei und zwei betrachtet, drei Rational-Ebenen geben, welche sich in einerlei gerader Linie schneiden werden, die man Radicalaxe nennen wird, und deren Constr. nach dem eben Gesagten keine Schwierigkeit darbieten wird.

Wenn endlich im Raume vier Kugeln coexistiren, so werden sie zu drei und drei genommen vier Radicalaxen geben, welche in einerlei Punkt zusammenlaufen, welcher der Radical-Mittelpunkt dieser vier Kugeln sein wird. Dieser Mittelp. könnte also nach dem, was vorhergehet, bestimmt werden. Dieses festgestellt, seien C, C′, C″ drei in einer Ebene gegebene Kreise und es sei O ihr Radical-Mittelpunkt. Es seien zu diesen zu zwei und zwei genommenen Kr. gemeinsch. äußere Tangenten gezogen. Diese Tangenten werden auf jedem Kreise zwei Berührungssehnen, die sich in einem Punkt schneiden, bestimmen; es seien für die drei Kreise P, P′, P″ die respektiven Durchschnittspunkte. Wenn man alsdann die geraden

Linien OP, OP', OP'' ziehet, so werden sie auf C, C', C'' respective die Punkte bestimmen, wo sie durch zwei Kreise berührt werden sollen, welche alle drei und alle auf einerlei Art berühren.

2) Es seien S, S', S'', S''' vier gegebene Kugeln im Raume, und es sei O ihr Radical-Mittelpunkt. Es seien zu diesen Kugeln, zu zwei und zwei genommen, äußere umschriebene Kegel gezogen; diese Kegel werden auf jeder Kugel drei Berührungslinien bestimmen, deren Ebenen sich in einem Punkt schneiden; und es seien für die vier Kugeln P, P', P'', P''' respective diese Durchschnittspunkte.

Wenn man alsdann die geraden Linien OP, OP', OP'', OP''' zieht, so werden sie auf S, S', S'', S''' respective die Punkte bestimmen, wo sie durch zwei Kugeln berührt werden sollten, welche alle viere berühren und sie alle auf gleiche Art berühren.

Macht man hier noch eine schickliche Combination der Winkel und innern umschriebenen Kegeln mit den Winkeln und äußerlich umschriebenen Kegeln, so leitet man aus diesen Construktionen so wie aus den vorher angezeigten ab die Bestimmung der acht Kr, welche drei gegeb. Kreise, und die der sechszehn Kugeln, welche vier gegebene Kugeln zugleich berühren können. Ueberdem, wenn man an diesen Constr. die Modificationen macht, welche dem Fall zukommen, in welchem die Halbm. von einigen der Kreise doch von

ligen der gegebenen Kugeln Null oder unendlich rden, führt man noch, wie im ersten Falle, die Auf- ung aller Aufgaben von Viete über die Berührun- nder Kreise, und die von Fermat über die Berüh- ng der Kugeln auf ein gleichförmiges Verfahren rück.

Ich will nicht entscheiden, ob dieses Verfahren sich selbst einige Vorzüge vor dem ersten hat, elches ich selbst geneigt wäre, als einfacher zu betrach- n; aber nur unter dieser Form giebt die Constr., elche die Kreise finden lehrt, die in einer Ebene drei gebene Kreise zugleich berühren, auch zugleich, ohne zend eine Modification, die Kreise, die drei auf ner Kugel gegebene Kreise zugleich berühren.

Den Beweis dieser Behauptung habe ich diesem kikel hauptsächlich gewidmet. Die Aufg. kommt genscheinlich auf diese zurück: Wenn drei Ke- l von einerlei Scheitel gegeben sind, einen ierten Kegel mit demselben Scheitel zu be- hreiben, der sie alle drei berührt; und un- r diesem Gesichtspunkt will ich sie betrachten.

Es seien C, C′, C″ drei gegebene Kegel von nerlei Scheitel, deren Erzeugungs-Winkel respective , x′, x″ sind.

Ihr gemeinsch. Scheitel sei der Coordinaten-An- ng, die wir rechtw. annehmen; und wobei wir setzen, aß die Axe des letztern die Axe der z sei. Stellen wir

[illegible] durch a, b, c, a', b', c', respective die Cosinus der Winkel vor, welche die Axen vom ersten und vom zweiten mit den Axen der Coordinaten bilden, welches, wie man weiß, Veranlassung giebt zu den Relationen

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (1),$$

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \quad (2).$$

Bezeichnen wir nachgehends durch A, B, C die Cosinus der Winkel, welche die Axe der gesuchten Kegel mit den Coordinatenaxen bildet, welches ebenfalls giebt

$$A^2 + B^2 + C^2 = 1 \quad (3);$$

und R sei sein Erzeugungswinkel. Wenn man will, daß dieser Kegel äußerlich die drei gegebenen Kegel berühren soll, so müßte der Winkel, welchen seine Axe mit der Axe eines jeden von ihnen macht, gleich sein der Summe ihrer Erzeugungswinkel, welches geben wird

$$aA + bB + cC = \text{Cos.}\,(R + r) \quad (4),$$
$$a'A + b'B + c'C = \text{Cos.}\,(R + r') \quad (5),$$
$$c'C = \text{Cos.}\,(R + r'') \quad (6).$$

Dieses sind die Gleichungen die man mit der Gleichung (3) verbinden muß, um den Erzeugungswinkel R von dem gesuchten Kegel zu erhalten, und die Cosinus A, B, C der Winkel, welche seine Axe mit den Axen der Coordinaten bildet; und man sieht an-

genſcheinlich, daß die Aufgabe zwei Auflöſungen haben werde.

Es giebt alſo zwei geſuchte Kegel, von welchen jeder eine Berührungslinie mit irgend einem der gegebenen Kegel hat z. B. mit C''; und es iſt hiernach klar, daß die Aufſuchung der Ebene, welche dieſe zwei gerade Linien enthält, nur eine Aufg. vom erſten Grade ſein muß.

Es ſeien alſo x, y, z die Coordinaten der Berührungslinie von C' mit dem geſuchten Kegel; wir kennen bereits einen Ort von dieſer Linie, und dieſes iſt der Kegel C'' ſelbſt, deſſen Gleichung iſt

$$(x^2 + y^2)\,\mathrm{Cos.}^2 r'' = z^2\,\mathrm{Sin.}^2 r'' \quad (7).$$

Es iſt alſo nur noch die Rede davon, einen zweiten zu ſuchen.

Da nun dieſe Linie mit den Axen der zwei Kegel in einerlei Ebene liegen muß, ſo folgt hieraus, daß man haben muß

$$Ax = By \quad (8).$$

Wenn man folglich A, B, C, R zwiſchen den 5 Gleichungen (3), (4), (5), (6), (8) eliminiert, ſo wird die reſultirende Gleichung in x, y, z die von dem verlangten zweiten Ort ſein.

Man weiß aber, daß eine durch den Durchſchnitt von zwei Oberflächen gegebene L. auch auf der ganzen Oberfläche iſt, deren Gleichung eine Combination der Gleich. von dieſen zweien iſt; woraus folgt, daß in der

Elimination wir uns mit der Gleichung (7) helfen können, um unsere Resultate zu vereinfachen.

Wir suchen also nur statt des gesuchten Orts irgend einen andern einfachern zu substituiren, indem wir den Kegel C'' längs der nämlichen geraden Linie schneiden.

Mittelst dieser Aufmerksamkeit wird die Elimination sehr leicht. Man zieht aus den Gleichungen (3), (6), (8), indem man Rücksicht auf die Gleichung (7) nimmt,

$$A = \frac{x \operatorname{Cos.} r'' . \operatorname{Sin.} (R + r'')}{z \operatorname{Sin.} r''},$$

$$B = \frac{y \operatorname{Cos.} r'' . \operatorname{Sin.} (R + r'')}{z \operatorname{Sin.} r''},$$

$$C = \frac{z \operatorname{Sin.} r'' . \operatorname{Cos.} (R + r'')}{z \operatorname{Sin.} r''},$$

Wenn die Werthe in den Gleich. (4) und (5) subst. werden, so werden sie

$$(ax + by) \operatorname{Cos.} r'' \operatorname{Sin.} (R + r'') + cz \operatorname{Sin.} r'' \operatorname{Cos.} (R + r'')$$
$$= z \operatorname{Sin.} r'' . \operatorname{Cos.} (R + r),$$

$$(a'x + b'y) \operatorname{Cos.} r'' \operatorname{Sin.} (R + r'') + c'z \operatorname{Sin.} r'' \operatorname{Cos.} (R + r'')$$
$$= z \operatorname{Sin.} r'' . \operatorname{Cos.} (R + r').$$

Aber man kann bemerken, daß

$$\operatorname{Cos.} (R + r) = \operatorname{Cos.} [(R + r'') - (r'' - r)] =$$
$$\operatorname{Cos.} (r'' - r) \operatorname{Cos.} (R + r'') + \operatorname{Sin.} (r'' - r) \operatorname{Sin.} (R + r''),$$

$$\operatorname{Cos.} (R + r') = \operatorname{Cos.} [(R + r'') - (r'' - r')] =$$
$$\operatorname{Cos.} (r'' - r') \operatorname{Cos.} (R + r'') + \operatorname{Sin.} (r'' - r') \operatorname{Sin.} (R + r''),$$

man

man wird alſo indem man ſubſt. und mit Cos. $(R + r'')$ dividirt, haben:

$[(ax + by)\,\mathrm{Cos.}\,r'' - z\,\mathrm{Sin.}\,r''\,\mathrm{Sin.}\,(r'' - r)]\,\mathrm{tg}(R + r'') + z\,\mathrm{Sin.}\,r''\,[c - \mathrm{Cos.}\,(r'' - r)] = 0,$

$[(a'x + b'y)\,\mathrm{Cos.}\,r'' - z\,\mathrm{Sin.}\,r''\,\mathrm{Sin.}\,(r'' - r')]$ mal $\mathrm{tg}(R + r'') + z\,\mathrm{Sin.}\,r''\,[c' - \mathrm{Cos.}\,(r'' - r')] = 0;$

woraus man durch Elimination von $\mathrm{tg}(R + r')$ ſchließen wird

$$\frac{(ax + by)\,\mathrm{Cos.}\,r'' - z\,\mathrm{Sin.}\,r''\,\mathrm{Sin.}\,(r'' - r)}{c - \mathrm{Cos.}\,(r'' - r)} = \frac{(a'x + b'y)\,\mathrm{Cos.}\,r'' - z\,\mathrm{Sin.}\,r''\,\mathrm{Sin.}\,(r'' - r)}{c' - \mathrm{Cos.}\,(r'' - r')}. \quad (9)$$

Dieſes iſt die Gleich. einer Ebene, deren Durchſchnitt mit C'' auf dieſem Kegel die grade Linie beſtimmen ſoll, längs, welcher er durch den geſuchten Kegel berührt werden ſoll. Da dieſe Gleich. einerlei bleibt, wenn man darin gleichzeitig die Zeichen von r, r', r'' ändert, ſo folgt hieraus, daß für die acht Combinationen, deren die Zeichen dieſer Winkel empfänglich ſind, d. h., für die acht Aufl. der Aufg., dieſe Gleich. nur vier diſtincte Formen annimmt, deren jede folglich zwei von dieſen Auflöſungen entſprechen.

Um die durch die Gleich. (9) ausgedrückte Ebene zu conſtr., iſt es nöthig und hinreichend, die zwei geraden Linien, die darin enthalten ſind, zu kennen; d. h., zwei Syſteme von zwei Gleich. in x, y, z zu finden, welche die Eigenſchaft beſitzen, die Gleich. (9)

identiſch zu machen. Und umgekehrt werden zwei beliebige diſtincte Arten, die Gleich. (9) identiſch zu machen, ohne zwiſchen x, y, z Relationen aufzuſtellen, welche den erſten Grad überſteigen, zu der Kenntniß der zwei graden Linien führen, welche die geſuchte Ebene beſtimmen.

Unter den verſchiedenen Arten, dieſe Gleich. identiſch zu machen, die in unendlicher Anzahl da ſind, wählen wir die zwei folgenden: 1) Wir werden die beiden Seiten der Gleich. (9) jede beſonders gleich $\frac{z \text{ Sin.}^2 r''}{\text{Cos} r''}$ ſetzen; 2) Wir werden die nämlichen Seiten gleich $-y \text{ Cos. } r''$ ſetzen. Dieſes wird, nach ganz geendigten Reductionen, die zwei Syſteme von Gleich. geben:

$$\left.\begin{aligned}(ax+by)\text{Cos.}^2 r'' &= z(c\,\text{Sin.}\,r''-\text{Sin.}\,r)\,\text{Sin.}\,r'',\\ (a'x+b'y)\text{Cos.}^2 r'' &= z'(c'\,\text{Sin.}\,r''-\text{Sin.}\,r')\,\text{Sin.}\,r'';\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

$$\left.\begin{aligned}(ax+by)\,\text{Cos.}\,r'' &= z\,(\text{Cos.}\,r-c'\,\text{Cos.}\,r'',)\\ (a'x+by)\,\text{Cos.}\,r'' &= z'(\text{Cos.}\,r'-c'\,\text{Cos.}\,r''.)\end{aligned}\right\}\quad(11)$$

Wenn man alſo die durch die Gleich. (10) ausgedrückte grade Linie konſtruirt, nachgehends die durch die Gleich. (11) ausgedrückte gerade Linie, ſo iſt die durch dieſe zwei gerade Linien gelegte Ebene als die durch die Gleich. (9) ausgedrückte anzuſehen.

Was hier, um die graden Linien (10) und (11) zu conſtr. am thunlichſten wäre, iſt, die Ebenen zu konſtr., deren Durchſchnitte dieſe grade Linien ſind. Aber mit geringer Aufmerkſamkeit erkennt man die Ebenen (10)

für die der Berührungslinien des Kegels C'' mit den gemeinsch. äußeren Berührungsebenen sowohl dieses Kegels und des Kegels C als auch des nämlichen Kegels und des Kegels C', und man erkennt die Ebenen (11) als diej., längs welchen die Kegel C, C' respective den Kegel C'' scheiden, oder, mit andern Worten für die Radicalebenen sowohl zu C u. C'' als zu C' u. C'' *);

*) In der That, wenn wir annehmen, daß die Gleich. von der den beiden Kegel C u. C'' gemeinsch. Berührungsebene sei

$$Dx + Ey + Fz = o \qquad (12)$$

mit der Bedingung

$$D^2 + E^2 + F^2 = 1, \qquad (13)$$

und man will, daß diese Berührungsebene außerhalb sein soll, d. h., wenn man will, daß diese Ebene die beiden Kegel auf einerlei Seite lassen, so werden D, E, F bestimmt werden durch die Gleich. (13), gefügt zu den Gleichungen

$$aD + bE + cF = \text{Sin.}\, r, \qquad (14)$$

$$F = \text{Sin.}\, r''; \qquad (15)$$

und man sieht, daß die Aufg. vom zweiten Grade ist, dergestalt, daß zwei Berührungsebenen da sind.

Wenn man nun annimmt, daß x, y, z die Coordinaten von einer oder der andern Berührungslinie mit C'' bezeichnen u. die Gleichungen (12), (13), (14), (15) zugleich für diese graden Linien Statt haben sollen, so wird das Resultat der Elimination von D, E, F unter sich eine Gleich. von einer Oberfläche sein, welche dieselben graden Linien enthält.

Dieses Resultat ist leicht zu erhalten. Man zieht aus den Gleichungen (12), (14), (15)

$$A = \frac{(\text{Sin.}\, r - c\,\text{Sin.}\, r'')\,y + bz\,\text{Sin.}\, r''}{ay - bx},$$

welches für den gesuchten Kegel eine Constr. anzeigt, die, nachgehends auf die Aufsuchung desj. Kreises angewendet, der drei andere auf einer Kugel berührt, auf die oben gelehrte zurück kommt. Diese findet sich selbst durch das Vorhergehende bestätiget, weil eine Ebene nichts anders ist als eine Kugel, deren Halbm. unendlich ist.

$$B = \frac{(\text{Sin.r} - c\,\text{Sin.r}'')x + az\,\text{Sin.r}''}{ay - bx},$$

$$C = \text{Sin.r}'';$$

Werthe, die, in der Gleich. (13) subst., geben

$$[(\text{Sin.r} - c\,\text{Sin.r}'')y + bz\,\text{Sin.r}'']^2 + [(\text{Sin.r} - c\,\text{Sin.r}'')x + az\,\text{Sin.r}'']^2 = (ay - bx)^2\,\text{Cos.}^2 r''.$$

Dieses ist also die Gleich. von einer Oberfläche, deren Durchschnitte mit dem Kegel C'' seine Berührungslinien mit den zwei Ebenen, welche zugleich die Kegel C'' u. C äußerlich berühren, bestimmen.

Wenn man aber die Gleich. entwickelt, sie mit $\text{Cos.}^2 r''$ multipl. und Rücksicht auf die Relation (1) nimmt, so kann sie unter diese Form gesetzt werden

$$[(ax + bx)\,\text{Cos.}^2 r'' - z(c\,\text{Sin.}r'' - \text{Sin.}r)\,\text{Sin}\,r'']^2 = [(c - \text{Sin}\,r''\,\text{Sin}\,r)^2 - \text{Cos.}^2 r''\,\text{Cos.}^2 x][z^2 - (z^2 + y^2 + z^2)\,\text{Cos.}^2 r''].$$

Verbindet man nun diese mit der von C'', welche

$$z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)\,\text{Cos.}^2 r''$$

ist, so reducirt sie sich blos auf

$$(ax + by)\,\text{Cos.}^2 r'' = z(c\,\text{Sin.}r'' - \text{Sin.}r)\,\text{Sin.}r'',$$

die, in der That, nichts anders ist als die erste von den Gleichungen (10).

Vereinfachung und Erweiterung der Euklidischen Geometrie.

Die Euklidische Geometrie hat in einem Zeitraum von mehr als 2000 Jahren, d. h., seit Euklides keiner wesentlichen Fortschritte sich zu rühmen. Ich wage daher wohl viel, wenn ich der gelehrten Welt meine Forschungen in diesem Gebiet vorlege. Ich habe in der That Jahre lang gekämpft, denn mehrere von den Sätzen, die ich hier mittheile, hatte ich schon um 1787 entdeckt, und sie auch seit der Zeit mehreren meiner Freunde, Bekannten und Zuhörer mitgetheilt, deren Beifall für mich sehr ermunternd war. Man erwarte in dieser Abhandlung nicht die Sätze so geordnet, wie es in einem Lehrbuche sein müßte. Es war hier nur mein Zweck, keinen Satz aufzustellen, der nicht aus dem Vorhergegangenen strenge bewiesen werden konnte, und besonders, zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit die aufgestellten Hauptlehrsätze Gelegenheit geben, neue geometrische Sätze zu entdekken. — Belohnt werde ich mich halten, wenn com-

petente Richter mich ihres Beifalls würdigen, und wenn dieser Versuch geübteren Mathematikern Veranlassung geben sollte, meinem angefangenen Werke den Stempel der Vollkommenheit zu geben.

Aus meiner Abhandlung selbst wird übrigens hervorgehen, daß ich die geometrischen Lehrsätze und Aufgaben rein geometrisch, ohne Einmischung arithmetischer Lehren, z. B. der Lehre von Verhältnissen und Proportionen zu beweisen suche, wie es die Würde einer eigenthümlichen Wissenschaft verlangt, und eben hierin bin ich viel weiter gegangen als Euklides selbst. — Der entgegengesetzte Weg, den die neuen Geometer gehen, kann zwar zu nützlichen Resultaten führen, steht aber in Absicht der Methode in jedem Betracht dem von mir eingeschlagenen Wege sehr nach.

§ 1.

Erkl. Ein beliebiges schiefwinkliges Parallelogramm, dessen Seiten a, b, soll durch a·b angedeutet werden.

Wäre das Parallelogramm rechtwinklig, so würde a·b ein Rectangel aus den Linien a und b vorstellen.

Eine Gleichung wie: a·b = c·d bedeutet also im Allgemeinen, daß die aus den Linien a, b u. c, d unter gleichem Winkel gebildeten Parallelogramme einander gleich sein sollen.

Wäre der von a, b und c, d eingeschlossene Winkel ein rechter, so würde man lesen: Das Rectangel aus a, b ist gleich dem Rect. aus c, d.

Es bedeutet also a·a entweder einen Rhombus oder ein Quadrat, dessen Seite a, je nachdem der Winkel ein schiefer oder ein rechter ist. Im letztern Falle ist es erlaubt, $a \cdot a = a^2$ zu setzen. In keinem Falle ist es hier ohne ausdrückliche Erinnerung erlaubt, jene gewählte Bezeichnung als Producte zu lesen oder ihr einen arithmetischen Sinn zu geben.

§ 2.

Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm., deren Seiten einzeln genommen einander gleich sind, decken sich.

§ 3.

Lehrs. Gleiche und gleichwinklige Prllgrm., die eine gleiche Seite haben, decken sich oder, ihre andern Seiten sind auch gleich.

§ 4.

Lehrs. Gleichwinklige Prllgrm. mit einer gleichen Seite haben zusammengenommen gleichen Inhalt mit einem ihnen gleichwinkligen Prllgrm. von eben der Seite, dessen Grundlinie allen ihren Grundlinien zusammen genommen gleich ist.

Also auch

Rectangel von gleicher Höhe haben zusammengenommen gleichen Inhalt mit einem Rect. von derselben Höhe, dessen Grundlinie allen ihren Grundlinien zusammengenommen gleich ist.

D. h. Wenn a die gleiche Seite, und b, c, d, e... die Grundlinien der gleichwinkligen Prllgrm. sind, so ist

$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + \ldots = a \cdot [b + c + d + e + \ldots]$.

Auch ist umgekehrt

$a \cdot [b + c + d + e + \ldots] = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + \ldots$

d. h. das Parallelogramm aus zwei graden Linien, deren eine aus mehrern Abschnitten bestehet, hat gleichen Inhalt mit allen den ihm gleichw. Prllgrm. zusammengenommen, welche aus der ungetheilten graden Linie und jedem der Abschnitte der andern beschrieben sind.

§ 5.

Zus. 1. Der Unterschied zweier gleichw. Prllgrm., die eine gleiche Seite haben, ist einem gleichw. Prllgrm. von derselben Seite gleich, dessen Grundl. dem Unterschiede ihrer Grundl. gleich ist.

d. h. $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot [b - c]$

und umgekehrt: $a \cdot [b - c] = a \cdot b - a \cdot c$.

§ 6.

Zus. 2. Das Prllgrm. aus zwei geraden Linien, die beide aus mehrern Abschnitten bestehen, hat gleichen Inhalt mit allen den ihm gleichw. Parallelogrm. zusammengenommen, welche aus je zwei Abschnitten der einen und der andern beschrieben sind.

Wenn $A = a + b + c + d \ldots$

und $B = \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots$

so ist

$$A \cdot B = [a + b + c + d + \ldots] \cdot B$$

$$= a \cdot B + b \cdot B + c \cdot B + d \cdot B + \ldots \quad (\S\ 4.)$$

$$= \left\{\begin{array}{l} a \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \\ + b \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \\ + c \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \\ + d \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \end{array}\right.$$

u. s. w.

$$= \left\{\begin{array}{l} a \cdot \alpha + a \cdot \beta + a \cdot \gamma + a \cdot \delta + \ldots \\ + b \cdot \alpha + b \cdot \beta + b \cdot \gamma + b \cdot \delta + \ldots \\ + c \cdot \alpha + c \cdot \beta + c \cdot \gamma + c \cdot \delta + \ldots \\ + d \cdot \alpha + d \cdot \beta + d \cdot \gamma + d \cdot \delta + \ldots \end{array}\right.$$

u. s. w.

§ 7.

Lehrsatz. Die Differenz zweier Quadrate ist gleich einem Rectangel aus der Summe und Differenz der Seiten dieser Quadrate.

Es seien a und b die Seiten zweier Quadrate, so soll sein

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Bew. $a^2 - b^2 = a \cdot a - a \cdot b + a \cdot b - b \cdot b$
$= a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b)$
$= (a + b) \cdot (a - b)$ } §4. u. 5.

§ 8.

Lehrsatz. Das Rectangel aus der Summe und der Differenz zweier Linien ist gleich der Differenz der Quadrate aus diesen Linien.

D. h. Wenn a und b diese Linien, so soll sein

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Bew. $(a + b) \cdot (a - b) = a \cdot (a - b) + b \cdot (a - b)$
$= a \cdot a - a \cdot b + a \cdot b - b \cdot b$
$= a^2 - b^2$ } §4. u. 5.

§ 9.

Neuer allgemeiner Haupt-Lehrsatz. In zwei rechtwinkligen und gleichwinkligen Triangeln sind die Rectangel aus je zwei nicht homologen Seiten, die aber zu gleichem Winkel gehören, einander gleich. (Fig. 1.)

Wenn A, B, C die Seiten des einen rechtw. Triangels

und a, b, c die homologen Seite des andern rechtw.

Triangels, so soll sein 1) A·b = a·B; 2) A·c = a·C; 3) B·c = b·C.

Bew. I. (Fig. 2.) Die rechtwinkligen Triangel ABC, abc seien gleichwinklig. Man bringe den kleinen △ abc mit dem Winkel a über den großen △, so daß a auf A, ab längs AB und ac längs AC fällt, und zeichne die Rect. AB·BC = □ BD; AB·bc = □ AG; und ab·BC = □ AE, so ist □ AG = □ AE (Eukl. I. B. 43 S.) oder

AB · bc = ab · BC.

D. h. die Rectangel aus zwei nicht homologen Catheten sind einander gleich.

Bew. II. (Fig. 3.) Man bringe ferner den kleinen Triangel so über den großen, daß zwar der Winkel a den Winkel A deckt, allein die Cathete ab falle längs AC und ac längs AB. Man zeichne die Rectangel AB · ac = □ AE und ab · AC = □ AG. Ziehe noch CD und cF,

so ist ∠ CAD = ∠ cAF
AC = AF
AD = ac
daher △ CAD ≅ △ cAF (Eukl. 1 B. 4 S.)
aber △ CAD = ½ □ AE
und △ cAF = ½ □ AG

Folglich □ AE = □ AG
oder AB·ac = ab·AC.

Eben so wird bewiesen, daß AC·bc = ac·BC.

das Prllgr. AE = AB·bc;
das Prllgr. cG = ac·BC;
das Prllgr. AF = AC·bc,

ist 1) Prllgr. bD = Prllgr. AE oder ab·BC = AB·bc
2) Prllgr. AF = Prllgr. cG oder AC·bc = ac·BC
3) Prllgr. AH = Prllgr. Bc oder AC·ab = ac·AB,
weil Prllgr. AH = Prllgr. bD
und auch Prllgr. AE = Prllgr. BC.
Da nun Prllgr. bD = Prllgr. AE,
so ist auch Prllg. AH = Prllgr. Bc.

§ 12.

ehrs. Wenn in zwei Tr. ABC, abc der W. A = W. a und AB.ac = ab.AC, so sind gedachte Tr. gleichwinklig. (Fig. 6.)

Bew. Man nehme AB′ = ab und ziehe b′c′ rallel mit BC, so ist nach § 11. AB·Ac′ = Ab′·AC. a nun Ab′·AC = AB·ac sein soll (Hyp. und Ab′ = ab), so muß auch AB·Ac′ = AB·ac sein. Folgh Ac′ = ac (§ 3.); demnach der △ Ab′c′ ≅ △ abc, id folglich auch △ abc gleichw. mit dem △ ABC.

§ 13.

Erkl. Wenn man von einem Punct auf eine ade Linie oder auf eine Ebene einen Perpendikel llen läßt, so ist der Punct, in welchem der Perpenkel die Linie oder Ebene trifft, die Projection eses Puncts auf jener Linie oder Ebene. Die Pro-

jection einer graden Linie auf einer graden Linie oder Ebene ist wieder eine grade Linie, die zwischen den Projectionen ihrer Endpuncte liegt. In zusammengesetzten Fällen dürfte es nützlich sein, durch eine gute Bezeichnung die Projection von einer Linie auf einer andern verständlich darzustellen. So wollen wir durch b_a die Projection der Linie b auf der Linie a, und eben so durch a_b die Projection der Linie a auf b darstellen.

Für die mit der Trigonometrie Vertrauten wollen wir noch bemerken, daß, wenn der durch a und b gebildete Winkel durch $\angle(a, b)$ angegeben wird, alsdann $a_b = a \cdot \text{Cos.}(a, b)$ und $b_a = b \cdot \text{Cos.}(a, b)$, wodurch die strengen rein geometrisch erwiesenen Resultate sofort in die trigonometrische Sprache übertragen werden. Folgende Sätze über die orthographische Projection, die ich hier nur historisch anführe, werden uns in der Folge nützlich sein.

§ 14.

1) Eine grade Linie, die in der Richtung der Entwerfungslinie liegt, erscheint in der Projection wie ein Punct.

2) Eine grade Linie, die parallel mit der Entwerfungsebene ist, wird durch eine ihr gleiche abgebildet.

3) In jeder geschlossenen gradlinigen Figur ist jede

Seite gleich der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf ihr.

4) Die Projection vom ganzen Umfange einer geschlossenen Figur auf einer beliebigt gegebenen graden Linie ist immer Null.

5) In einem rechtw. Tr. ist z. B. jede Cathete die Projection der Hypotenuse auf ihr. — Die Hypotenuse ist gleich der Summe der Projectionen beider Catheten auf ihr, und die Projection einer Cathete auf der anderen ist Null. Wenn a und b die Catheten und c die Hypotenuse eines rechtw. Tr. bezeichnen, so ist $a = c_a$; $b = c_b$; $c = a_c + b_c$ und $a_b = b_a = 0$.

§ 15.

Hrf. Bei jedem Winkel sind die Rect. aus einem Schenkel in die Projection des andern auf ihm einander gleich. (Fig. 7.)

Bew. Von dem Endpuncte B und C der chenkel des Winkels BAC sei Bb perpendikular auf m verlängerten Schenkel AC, und Cc perpendikular f AB. — Zeichne die

] $bD = AC \cdot Ab$ und $\square\, cE = Ac \cdot AB$. Ziehe BD, E, so ist

$\left.\begin{array}{r} \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AC \\ AB = AB \end{array}\right\}$ daher $\triangle BAD \cong CAE$;
aber $\triangle BAD = \frac{1}{2}\square\, bD$
und $\triangle CAE = \frac{1}{2}\square\, cE$.

lglich $\square\, bD = \square\, cE$ oder $AC \cdot Ab = Ac \cdot AB$.

Der Beweis wird ungleich kürzer, wenn man nicht übersieht, daß △ABb und △ACc gleichw. sind, folglich unmittelbar nach § 9.

$AC \cdot Ab = Ac \cdot AB$, auch $AB \cdot Cc = AC \cdot Bb$, d. h., auch die Rect. aus jedem Schenkel in die Entwurfslinie auf ihm sind einander gleich.

§ 16.

Aufg. Der △ABC sei rechtwinklig bei C, und CD ⊥ auf AB (perpendicular. Man soll die Eigenschaften der hier vorhandenen drei rechtwinkligen und gleichwinkligen Tr. auffinden. (Fig. 8.)

Aufl. Die △△CDA und CDB haben jede mit dem △ABC einen spitzen Winkel gemein, daher sind sie alle drei gleichw. und $x = A$, $y = B$.

Die drei Seitrn des △s ABC sind AB, AC, BC
— — — — △s CDA — AC, AD, CD
— — — — △s CDB — BC, CD, BD.

Also gestellt stehen nur die homologen Seiten unter einander.

Nun verbinde man hier je zwei nicht homologe Seiten zu Seiten eines Rect. Dies giebt folgende Gleichungen:

1) $AB \cdot AD = AC^2$; 2) $AB \cdot CD = AC \cdot BC$;
3) $AC \cdot CD = AD \cdot BC$; 4) $AB \cdot BD = BC^2$;
5) $AC \cdot BD = CD \cdot BC$; 6) $AD \cdot BD = CD^2$

No. 1. und 4. sagen aus, daß in jedem rechtwink-

winkligen △ das Quadrat über einer Cathete gleich ist dem Rect. aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt.

No. 6. belehrt uns, daß in jedem rechtwinkligen Tr. das Quadrat des Perpendikels gleich ist dem Rect. aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Von diesem bekannten Satze, der in allen Geometrieen entweder aus dem Pythagorischen Lehrs. oder aus der Aehnlichkeit der Tr. bewiesen wird, gebe ich noch folgenden neuen äußerst einfachen Beweis. (Fig. 9.)

Man nehme AE = CD, ziehe AG und EF parallel mit CD und CG || AB, so ist EH = BD; zieht man ferner IK || AB, so ist nach Euklid 1 B. 43 S. □ EG = □ DI oder $CD^2 = AD \cdot DB$.

Aus No. 3 und 5 ergiebt sich, daß in jedem rechtwink. Tr. das Rect. aus einer Cathete und dem Perpend. gleich ist dem Rect. aus der andern Cathete und der Projection der ersten Cathete auf der Hypotenuse.

Für Liebhaber gebe ich hier von diesem Satze folgenden besondern Beweis:

I. Es soll $AC \cdot CD = AD \cdot BC$ sein. (Fig. 10.)

Bew. Verl. BC und mache CE = CD. Vollende das Rect. AE, ziehe AG || CD und vollende das Rect. DG,

so ist der △ AFG ≅ △ CDB, also AG = BC,

Also auch

Rectangel von gleicher Höhe haben zusammengenommen gleichen Inhalt mit einem Rect. von derselben Höhe, dessen Grundlinie allen ihren Grundlinien zusammengenommen gleich ist.

D. h. Wenn a die gleiche Seite, und b, c, d, e.... die Grundlinien der gleichwinkligen Prllgrm. sind, so ist

$a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + \ldots = a \cdot [b + c + d + e + \ldots]$.

Auch ist umgekehrt

$a \cdot [b + c + d + e + \ldots] = a \cdot b + a \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + \ldots$

d. h. das Parallelogramm aus zwei graden Linien, deren eine aus mehrern Abschnitten bestehet, hat gleichen Inhalt mit allen den ihm gleichw. Prllgrm. zusammengenommen, welche aus der ungetheilten graden Linie und jedem der Abschnitte der andern beschrieben sind.

§ 5.

Zus. 1. Der Unterschied zweier gleichw. Prllgrm., die eine gleiche Seite haben, ist einem gleichw. Prllgrm. von derselben Seite gleich, dessen Grundl. dem Unterschiede ihrer Grundl. gleich ist.

d. h. $a \cdot b - a \cdot c = a \cdot [b - c]$

und umgekehrt: $a \cdot [b - c] = a \cdot b - a \cdot c$.

§ 6.

Zuſ. 2. Das Prllgrm. aus zwei geraden Linien, die beide aus mehrern Abſchnitten beſtehen, hat gleichen Inhalt mit allen den ihm gleichw. Parallelogrm. zuſammengenommen, welche aus je zwei Abſchnitten der einen und der andern beſchrieben ſind.

Wenn $A = a + b + c + d \ldots$

und $B = \alpha + \beta + \gamma + \delta \ldots$

iſt

$$A \cdot B = [a + b + c + d + \ldots] \cdot B$$

$$= a \cdot B + b \cdot B + c \cdot B + d \cdot B + \ldots \quad (\S\ 4.)$$

$$= \left.\begin{array}{l} a \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \\ + b \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \\ + c \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \\ + d \cdot [\alpha + \beta + \gamma + \delta + \ldots] \end{array}\right\}$$

u. ſ. w.

$$= \left\{\begin{array}{l} a \cdot \alpha + a \cdot \beta + a \cdot \gamma + a \cdot \delta + \ldots \\ + b \cdot \alpha + b \cdot \beta + b \cdot \gamma + b \cdot \delta + \ldots \\ + c \cdot \alpha + c \cdot \beta + c \cdot \gamma + c \cdot \delta + \ldots \\ + d \cdot \alpha + d \cdot \beta + d \cdot \gamma + d \cdot \delta + \ldots \end{array}\right.$$

u. ſ. w.

§ 7.

Hrſatz. Die Differenz zweier Quadrate iſt gleich einem Rectangel aus der Summe und Differenz der Seiten dieſer Quadrate.

Triangels, so soll sein 1) A·b = a·B; 2) A·c = a·C; 3) B·c = b·C.

Bew. I. (Fig. 2.) Die rechtwinkligen Triangel ABC, abc seien gleichwinklig. Man bringe den kleinen △ abc mit dem Winkel a über den großen △, so daß a auf A, ab längs AB und ac längs AC fällt, und zeichne die Rect. AB·BC = □ BD; AB·bc = □ AG; und ab·BC = □ AE, so ist □ AG = □ AE (Eukl. I. B. 43 S.) oder

AB · bc = ab · BC.

D. h. die Rectangel aus zwei nicht homologen Catheten sind einander gleich.

Bew. II. (Fig. 3.) Man bringe ferner den kleinen Triangel so über den großen, daß zwar der Winkel a den Winkel A deckt, allein die Cathete ab falle längs AC und ac längs AB. Man zeichne die Rectangel AB·ac = □ AE und ab·AC = □ AG. Ziehe noch CD und cF,

so ist ∠ CAD = ∠ cAF
AC = AF
AD = ac
daher △ CAD ≅ △ cAF (Eukl. 1 B. 4 S.)
aber △ CAD = ½ □ AE
und △ cAF = ½ □ AG
Folglich □ AE = □ AG
oder AB·ac = ab·AC.

Eben so wird bewiesen, daß AC·bc = ac·BC.

Seite gleich der algebraischen Summe der Projectionen aller übrigen Seiten auf ihr.

4) Die Projection vom ganzen Umfange einer geschlossenen Figur auf einer beliebigt gegebenen graden Linie ist immer Null.

5) In einem rechtw. Tr. ist z. B. jede Cathete die Projection der Hypotenuse auf ihr. — Die Hypotenuse ist gleich der Summe der Projectionen beider Catheten auf ihr, und die Projection einer Cathete auf der anderen ist Null. Wenn a und b die Catheten und c die Hypotenuse eines rechtw. Tr. bezeichnen, so ist $a = c_a$; $b = c_b$; $c = a_c + b_c$ und $a_b = b_a = 0$.

§ 15.

ehrs. Bei jedem Winkel sind die Rect. aus einem Schenkel in die Projection des andern auf ihm einander gleich. (Fig. 7.)

Bew. Von dem Endpuncte B und C der henkel des Winkels BAC sei Bb perpendikular auf n verlängerten Schenkel AC, und Cc perpendikular AB. — Zeichne die

bD = AC·Ab und □ cE = Ac·AB. Ziehe BD, so ist

BAD = ∠ CAE
AD = AC
AB = AB
} daher △BAD ≅ CAE; aber △BAD = ½ □ bD und △CAE = ½ □ cE.

ch □ bD = □ cE oder AC·Ab = Ac·AB.

Der Beweis wird ungleich kürzer, wenn man nicht übersieht, daß $\triangle ABb$ und $\triangle ACc$ gleichw. sind, folglich unmittelbar nach § 9.

$AC \cdot Ab = Ac \cdot AB$, auch $AB \cdot Cc = AC \cdot Bb$,

d. h., auch die Rect. aus jedem Schenkel in die Entwurfslinie auf ihm sind einander gleich.

§ 16.

Aufg. Der $\triangle ABC$ sei rechtwinklig bei C, und CD auf AB perpendicular. Man soll die Eigenschaften der hier vorhandenen drei rechtwinkligen und gleichwinkligen Dr. auffinden. (Fig. 8.)

Aufl. Die $\triangle\triangle CDA$ und CDB haben jede mit dem $\triangle ABC$ einen spitzen Winkel gemein, daher sind sie alle drei gleichw. und $x = A$, $y = B$.

Die drei Seitrn des $\triangle$s ABC sind AB, AC, BC
— — — — $\triangle$s CDA — AC, AD, CD
— — — — $\triangle$s CDB — BC, CD, BD.

Also gestellt stehen nur die homologen Seiten unter einander.

Nun verbinde man hier je zwei nicht homologe Seiten zu Seiten eines Rect. Dies giebt folgende Gleichungen:

1) $AB \cdot AD = AC^2$; 2) $AB \cdot CD = AC \cdot BC$;
3) $AC \cdot CD = AD \cdot BC$; 4) $AB \cdot BD = BC^2$;
5) $AC \cdot BD = CD \cdot BC$; 6) $AD \cdot BD = CD^2$

No. 1. und 4. sagen aus, daß in jedem rechtwink-

winkligen △ das Quadrat über einer Cathete gleich ist dem Rect. aus der Hypotenuse und dem anliegenden Abschnitt.

No. 6. belehrt uns, daß in jedem rechtwinkligen Tr. das Quadrat des Perpendikels gleich ist dem Rect. aus den beiden Abschnitten der Hypotenuse.

Von diesem bekannten Satze, der in allen Geometrieen entweder aus dem Pythagorischen Lehrs. oder aus der Aehnlichkeit der Tr. bewiesen wird, gebe ich noch folgenden neuen äußerst einfachen Beweis. (Fig. 9.)

Man nehme AE = CD, ziehe AG und EF parallel mit CD und CG ∥ AB, so ist EH = BD; zieht man ferner IK ∥ AB, so ist nach Euklid 1 B. 43 S. □ EG = □ DI oder $CD^2 = AD \cdot DB$.

Aus No. 3 und 5 ergiebt sich, daß in jedem rechtwink. Tr. das Rect. aus einer Cathete und dem Perpend. gleich ist dem Rect. aus der andern Cathete und der Projection der ersten Cathete auf der Hypotenuse.

Für Liebhaber gebe ich hier von diesem Satze folgenden besondern Beweis:

I. Es soll $AC \cdot CD = AD \cdot BC$ sein. (Fig. 10.)

Bew. Verl. BC und mache CE = CD. Vollende das Rect. AE, ziehe AG ∥ CD und vollende das Rect. DG,

so ist der △ AFG ≅ △ CDB, also AG = BC,

und □ AE = Prllgr. CG,
auch □ DG = Prllgr. CG;
folglich □ AE = □ DG
oder AC · CD = AD · BC.

II. Es soll BC · CD = AC · BD sein (Fig. 11.).

Bew. Ueber BC zeichne man das Rect. BE, in welchem CE = CD. Verl. DC und FE, bis beide sich in C schneiden. Ziehe BH || DG und HI || BD, so ist △ CEG ≅ △ CDA, also CA = CG = BH.

Ferner ist das □ BE = Prllgr. BG,
auch ist das □ BI = Prllgr. BG;
folglich □ BE = □ BI
oder BC · CD = AC · BD.

Addiren wir die Rect. in No. 1 und 4, so ergiebt sich sofort der Pythagorische Lehrs., nämlich $AB^2 = AC^2 + BC^2$; der hier also nur als ein Corollar erscheint, und den wir, nach Bekanntschaft mit unserm Lehrs. §. 9., gar nicht verfehlen konnten.

No. 2. sagt aus, daß das Rect. aus der Hypotenuse und dem Perpendikel gleich ist dem Rect. aus den beiden Catheten, welches sich auch leicht auf eine besondre Weise so beweisen läßt (Fig. 12.).

Man zeichne das Rect. BE = AB · CD und das Rect. CF = BC · CA, so ist der △ ABC die Hälfte vom □ BE, und auch die Hälfte vom □ CF, folglich □ BE = □ CF, d. h., AB · CD = AC · CB. Eukl. 10. B. 33 S. 1ster Lehrs.

§. 17.

Neuer allgemeiner Lehrſ. In jedem beliebigen Tr. iſt das Rect. aus einer Seite und der Projection einer andern Seite auf ihr gleich dem Rect. aus der zweiten Seite und der Projection der erſtern auf ihr. (Fig. 13.)

Bew. Von allen drei Winkelſpitzen fälle man Perpendicularen auf die Gegenſeiten, ſo iſt nach §. 9. oder nach §. 15 ſofort aus der Figur zu leſen:

$$AB \cdot Ac = Ab \cdot AC$$
$$BA \cdot Bc = Ba \cdot BC$$
$$CA \cdot Cb = Ca \cdot CB.$$

§. 18.

Lehrſ. In jedem ſpitzwinkligen Tr. iſt das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden andern Seiten, weniger einem doppelten Rect. aus einer dieſer Seiten und der Projection der andern auf ihr. (Fig. 13.)

So iſt $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BC \cdot Ba = A^2 + BC^2 - 2BA \cdot Bc$.

Daſſelbe gilt auch von jeder Seite in einem ſtumpfwinkligen Tr., wenn ſie einem ſpitzen Winkel gegenüber liegt.

Bew. I. $AC^2 = AC \cdot Ab + AC \cdot Cb$ (weil $AC = Ab + Cb$ §. 13. No. 3.)
$= AB \cdot Ac + BC \cdot Ca$ (§. 17.)
$= AB^2 - AB \cdot Bc + BC^2 - BC \cdot Ba$
$= BA^2 + BC^2 - 2AB \cdot Bc$
oder $= BA^2 + BC^2 - 2BC \cdot Ba$ } Weil $AB \cdot Bc = BC \cdot Ba$ (§. 17.)

Eben so ist $AB^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot Cb$
oder $= CA^2 + CB^2 - 2CA \cdot Ca$
und $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot Ac$
oder $= AB^2 + AC^2 - 2AC \cdot Ab$

Für den stumpfwinkligen Tr. ist (Fig. 13.)
$AC^2 = AC \cdot Ab - AC \cdot Cb$
$= AB \cdot Ac - CB \cdot Ca$ (§. 17.)
$= AB^2 - AB \cdot Bc - [BC \cdot Ba - BC^2]$
$= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot Bc$
$= BA^2 + BC^2 - 2BC \cdot Ba.$

§. 19.

Lehrs. In jedem stumpfwinkligen Tr. ist das Quadrat über der Seite, die dem stumpfen Winkel gegenüber liegt, gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, mehr einem doppelten Rect. aus einer dieser Seiten und der Projection der andern auf ihr. (Fig. 13.)

$$AB^2 = CA^2 + CB^2 + 2CA \cdot Cb$$
$$\text{oder} = CA^2 + CB^2 + 2CB \cdot Ca$$

ew. $AB^2 = AB \cdot Ac + AB \cdot Bc$
$= Ab \cdot AC + Ba \cdot BC$ (§. 17.)
$= CA^2 + CA \cdot Cb + CB^2 + CB \cdot Ca$
$= CA^2 + CB^2 + 2CA \cdot Cb$
oder $= CA^2 + CB^2 + 2CB \cdot Ca$

Anm. Die zwei Lehrs. in §. 18 und 19 hat auch bereits Eukl. im 2. B. 12 und 13 S. vermittelst des Pythag. Lehrs. und anderer im 2. B. seiner Elemente enthaltenen Sätze erwiesen. — Meine hier gegebenen Beweise sind von dem Pyth. Lehrs. unabhängig und ungleich einfacher. Noch leichter läßt sich das Resultat dieser Sätze aus der Figur lesen, wenn man über alle Seiten Quadrate zeichnet.

Zus. Wenn im Tr. in Fig. 13. der Winkel C n rechter wäre, so verschwinden die Rect. $CA \cdot Cb$ nd $CB \cdot Ca$, weil Ca sowol als Cb $= o$ sind, folgch bleibt $AB^2 = CA^2 + CB^2$. Hier erscheint also r Pyth. Lehrs. abermals als ein bloßes Corollarium.

§. 20.

Erkl. Jede gerade Linie, die man von der Spitze nes Tr. nach irgend einem Punct der gegenüberlienden Seite zieht, soll eine Transversale genannt erden. Wenn es Noth thut, mag auch jede gerade nie, welche den Umfang einer Figur schneidet, dien Namen führen.

§. 21.

Neues Lehrs. Zieht man von der Spitze eines gleichschenkligen Tr. eine beliebige Transversale, welche die Grundlinie oder ihre Verlängerung schneidet, so ist das Rect. aus der Summe und Differenz eines Schenkels und der Transversale gleich dem Rect. aus den beiden durch die Transversale auf der Grundlinie gemachten Abschnitten.

I. Wenn die Transversale die Grundlinie schneidet. (Fig. 14.)

Bew. Es sei ACB der gleichschenklige Tr. und CD die Transversale, so ist, wenn Cc auf AB perpendikular,

$$CA^2 = CD^2 + AD^2 + 2AD \cdot Dc \text{ (§. 19.)}$$

also auch $CA^2 - CD^2 = AD^2 + 2AD \cdot Dc$.

Mithin $(CA + CD) \cdot (CA - CD) = AD(AD + 2Dc)$ (§. 7.).

Da nun $AD + 2Dc = BD$ [denn $2Dc$ ist der Unterschied zwischen den Abschnitten].

so ist auch $(CA + CD) \cdot (CA - CD) = AD \cdot DB$.

II) Wenn die Transversale die Verlängerung der Grundlinie schneidet. (Fig. 15.)

Bew. Es sei Cc auf AB perpendikular, so ist

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 + 2AD \cdot Ac \text{ (§. 19.)}$$

$$CD^2 - AC^2 = AD^2 + 2AD \cdot Ac$$

$(CD + CA) \cdot (CD - CA) = AD \cdot (AD + 2Ac)$ (§. 7.);
$AD + 2AC = BD$ [denn $2AC$ ist die Differenz der Abschnitte];
folglich $(CD + CA) \cdot (CD - CA) = AD \cdot BD$.

§. 22.

Lehrs. Wird in einem beliebigen Tr. die Transversale von der Spitze bis zur Mitte der Grundlinie gezogen, so ist die Summe der Quadrate der beiden Seiten gleich der doppelten Summe des Quadrats der Transversale und des Quadrats der halben Grundl.

Bew. Es sei Cc auf AB perpendikular und CD die Transversale, so ist

$$\left.\begin{aligned} CA^2 &= DC^2 + DA^2 + 2DA \cdot Dc \\ \text{und } CB^2 &= DC^2 + BD^2 - 2DB \cdot Dc \end{aligned}\right\} \text{§. 18. 19.}$$

folglich $CA^2 + CB^2 = 2DC^2 + 2AD^2 = 2[DC^2 + AD^2] = 2[DC^2 + \frac{1}{4}AB^2]$.

Zus. Wenn die Transversale CD der halben Grundlinie AB gleich ist, so ergiebt sich: $CA^2 + CB^2 = 4AD^2 = AB^2$; also nach Eukl. 1. B. 22. S. ist der Triangel in diesem Falle rechtwinklig, d. h., wenn die drei Winkelspitzen eines Triangels von der Mitte einer Seite gleich weit entfernt liegen, so ist der Tr. rechtwinklig. Dieser Satz läßt sich aber auch

leicht unabhängig vom §. 22. also beweisen. In Fig. 16. ist $m = 2x$ und $n = 2y$, also $m + n = 2x + 2y$; da nun $m + n = 2R$, so ist $x + y =$ Winkel $C = R$.

Und umgekehrt: In jedem rechtwinkligen Dr. liegen die 3 Winkelspitzen von der Mitte der Hypotenuse gleich weit entfernt, welches apagogisch leicht zu erweisen ist. Dieses Letztere vorausgesetzt, so würde aus §. 22. wieder der Pythag. Lehrsatz als Corollar hervorgehen.

§. 23.

Lehrs. In jedem Parallelogramm ist die Summe der Quadrate der beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der vier Seiten. (Fig. 17.)

Bew. Da die Diagonalen eines Prllgr. sich gegenseitig halbiren, so ist nach §. 22.

$$AB^2 + AD^2 = 2AE^2 + 2BE^2$$

und $$AD^2 + DC^2 = 2AE^2 + 2ED^2$$

folglich $$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2$$

oder $$2[AB^2 + AD^2] = AC^2 + BD^2.$$

Zus. Werden die Diagonalen gleich, so wird das Prllgr. ein Rect., und es ergiebt sich hieraus wiederum der Pyth. Lehrsatz als Corollar.

§. 24.

Lehrs. In jeder vierseitigen Figur ist die Summe der Quadrate aller Seiten gleich der Summe von den Quadraten der beiden Diagonalen und dem vierfachen Quadrate von der Entfernung der Mittelpuncte beider Diagonalen. (Fig. 18.)

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2,$$

wo E und E die Mitten der Diagonalen

Bew. Ziehe BE, DE, so ist

$$AB^2+BC^2=2AE^2+2BE^2$$

und $$CD^2+DA^2=2AE^2+2DE^2$$

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+2[BE^2+DE^2];$$

$$2[BE^2+DE^2]=2[2BF^2+2EF^2]$$

$$=BD^2+4EF^2;$$

folglich $$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2$$

$$=AC^2+BD^2+4EF^2$$

Dieser allgemeine sehr schöne Satz ist von Euler zuerst geomet. auf eine andre Art erwiesen worden. (Nov. Comm. Acad. Imp. Petrop. T. I. p. 409 sqq.). Wenn $EF=0$, so ergiebt sich der Satz von §. 23. als Corollar, und die Figur ist in diesem Falle ein Prllgr., und hiermit ist zugleich die Frage beantwortet: In welcher vierseitigen Figur ist die Summe der Quadrate der Diagonalen ein Maximum? Der gegebene Beweis gilt auch für 4 beliebige P. im Raume.

§. 25.

Lehrs. Wenn Punkte D_1, D_2, D_3 .. von der Mitte C einer geraden Linie AB gleich weit entfernt liegen, so ist die Summe der Quadrate aus den Entfernungen dieses Punkts von den Endpunkten A und B der gegebenen Linie eine beständige Größe. (Fig. 19.).

Bew. Nach §. 22. ist

$$DA^2 + DB^2 = 2[AC^2 + CD^2].$$

§. 26.

Lehrs. Wenn die Winkelspitzen D_1, E_2, F der über der Grundlinie AB eines gleichschenkligen Tr. ACB gezeichneten Tr. von der Spitze C des gleichschenkligen Tr. um die Länge eines Schenkels CA entfernt sind, und mit der Spitze C auf einerlei Seite der Grundlinie liegen, so sind gedachte Winkel einander gleich, und jeder ist die Hälfte des Winkels C an der Spitze des gleichschenkligen Tr. (Fig. 20.).

Bew. Es sind hier drei Fälle zu beachten:

1) Wenn die Spitze D in grader Linie mit einem Schenkel CA des gleichschenkligen Tr. liegt. In diesem Falle ist $\angle$ ACB der äußere Winkel von

dem gleichschenkligen Tr. BCD, und folglich ∠ ACB = 2D.

2) Wenn die Schenkel des Winkels E den Winkel C einschließen. Ziehe ECG, so wird der Winkel ACB in zwei Theile zerlegt, davon der eine der äußere Winkel des gleichschenkligen △s ACE, und der andere der äußere Winkel von dem gleichschenkligen △ BCE, woraus sich denn ergibt, daß ∠ ACB = 2E ist.

3) Wenn der Winkel F den einen Schenkel GB schneidet. In diesem Falle ziehe FCH, so ist ∠ HCB der äußere Winkel des gleichschenkligen △s BCF, und ∠ HCA der äußere Winkel von dem gleichschenkligen △ ACF, daraus ergiebt sich Winkel ACB = 2 Winkel AFB.

Zus. Es sei I ein Punkt auf der andern Seite der Grundlinie AB, so ist der Winkel AIB immer die Hälfte von dem erhabenen Winkel ACB, welches erwiesen wird, wenn man durch I und C eine Linie Linie ziehet; er ergänzt also einen Winkel, wie D, E, F zu 2R.

§. 27.

Lehrs. Wenn Winkel D, E, F auf einerlei Seite über der Grundlinie AB eines gleichschenkligen Tr., jeder gleich ½ Winkel ACB sind, so liegen sie alle von der Spitze C des gleichschenkligen Tr. ACB gleich weit entfernt,

und, wenn I ein Supplementw. z. B. von D ist, so ist auch CI = CA. (Fig. 20.)

Bew. Der Beweis läßt sich leicht apagogisch führen und kann seiner Leichtigkeit wegen hier wegbleiben.

§. 28.

Aufg. Zu drei gegebenen Punkten A, B, C, die nicht in grader Linie liegen, einen Mittelpunkt, d. h., einen Punkt zu finden, der von diesen drei gegebenen Punkten gleich weit entfernt liegt. (Fig. 21.)

Aufl. Man verbinde die Punkte durch grade Linien und errichte auf zwei dieser Linien in deren Mitte Perpendikel; wo sich diese schneiden, ist der Mittelpunkt.

Bew. Es seien DE und FG die gedachten Perpd., so ist ihr Durchschnittspunkt H der Mittelp.; denn zieht man HA, HB, HC, so ist △ AHF ≅ △ CHF und △ HDA ≅ △ HDB, folglich HA = HB = HC.

§. 29.

Neuer allgemeiner Hauptlehrs. In zwei beliebigen gleichwinkligen Tr. sind die Rect. aus je zwei nicht homologen Seiten, die zu gleichen Winkeln gehören, einander gleich.

Es seien (Fig. 22.) ABC und abc zwei gleichwinklige Tr., so soll z. B. sein CA · cb = ca · CB.

Bew. Den kleinen △ abc lege man an den großen △ ABC mit dem gleichen Winkel c = C so an einander, daß ca mit CB und cb mit CA in eine grade Linie fällt. Man bestimme nach §. 28. zu den drei Punkten A, B, a den Mittelpunkt. Da nun Winkel b = Winkel B, so ist dieser Punkt D auch der Mittelpunkt von diesen 4 Punkten A, B, a und b (§. 27.). Ziehe DB, DA und DC, so ist nach §. 21. I. BC · ca = (BD + DC) (BD — DC).

Zieht man DA und Db, so ist eben so nach §. 21.

AC · cb = (AD + DC) (AD — DC),

folglich CA · cb = ca · CB.

Eben so beweist man auch, daß

AC · ab = ac · AB und BC · ba = bc · BA.

Andrer Bew. Man lege den kleinen Tr. in den großen, so daß die Winkel c = C sich decken, und ca längs CB fällt.

Es sei D der Mittelpunkt von B, A, b, so ist, weil ∠ Bab + ∠ BAb = 2R, der Punkt D auch der Mittelpunkt von B, A, b und a (§. 27.). Zieht man nun DA, DB, Da, Db, so ist nach §. 21. II.

CA · cb = (DC + DA) (DC — DA)

und CB · ca = (DC + DB) (DC — DB)

folglich CA · cb = CB · ca.

Anmerk. Dieser Lehrsatz ist der Hauptlehrsatz in meinem System der Geometrie und ist hier auf das strengste rein geometrisch leicht erwiesen worden.

Als Lehrsatz ist er nirgends meines Wissens so aufgestellt worden, und ein Geometer, der zum Beweise desselben aufgefordert würde, könnte ihn doch ohne Anstand vermittelst Proportionen aus der Aehnlichkeit der Triangel erweisen, ohne zu ahnen, daß es für diesen höchst allgemeinen und wichtigen Lehrsatz einen so äußerst leichten und strengen Beweis, ohne Einmischung arithm. Begriffe wie z. B. die von Verhältniß und Proportionen, gibt. — Ich gestehe es aufrichtig, daß mir seine Entdeckung das höchste Vergnügen gewährt hat und noch gewährt, indem ich überzeugt bin, daß die Euklidische Geometrie durch diese Sätze ungemein erleichtert und die rein geom. Methode dadurch noch vervollkommnet wird. — Spielend, so zu sagen, werden, ohne der Strenge das Geringste zu vergeben, eine Menge bekannte und unbekannte wichtige Sätze der Geometrie dadurch von selbst entdeckt. — Den Einwurf, daß, die Lehre von der Aehnlichkeit der Triangel vorausgesetzt, alle von mir vorgetragenen Sätze ebenfalls sich erweisen lassen, darf ich hier von keinem erwarten, der dieses Feld kennt und Vergleichungen zwischen Methoden anzustellen versteht. In einem System der Geometrie müßte dieser Lehrsatz, so früh als möglich, vorkommen, und die von mir hier mitgetheilten Zwischensätze müßten ihren Platz anderswo finden.

§. 30.

Lehrs. Wenn in zwei Tr. ABC, abc die Rect. aus je zwei Seiten, die in beiden Tr. einen Winkel einschließen, gleich sind, nämlich

$AB \cdot ac = ab \cdot AC$; $AB \cdot bc = ab \cdot BC$
und $AC \cdot bc = ac \cdot BC$,

so sind die Tr. gleichwinklig (Fig. 12.). Dieses wollen wir künftig durch das Zeichen $\sim$ anzeigen.

Bew. Nimmt man $Ab' = ab$, $Ac' = ac$ u. zieht $b'c'$, so ist, weil nun auch

$AB \cdot Ac' = Ab \cdot AC$,

der $\triangle Ab'c' \sim \triangle ABC$.

Es muß daher auch $AB \cdot b'c' = Ab' \cdot AC$ sein.

Da nun $Ab' \cdot BC = ab \cdot BC = AB \cdot bc$,
so muß $AB \cdot b'c' = AB \cdot bc$ sein,
mithin auch $b'c' = bc$ (§. 3.);
demnach $\triangle abc \cong \triangle Ab'c'$,
folglich $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

§. 31.

Der allgemeine Lehrsatz in §. 29. ist nicht blos für Rect. wahr sondern auch für jedes aus den genannten Seiten gebildete gleichwinklige Parallelogr., wie dieses aus §. 11. zu ersehen ist, und daher erhalten alle erwiesene Sätze eine noch größere Allgemeinheit.

§. 32.

Lehrs. Zieht man in einem Tr. eine Linie DE mit der Grundlinie BC parallel, so ist

1) das Rect. aus dem obern Abschnitt AD der einen Seite und dem untern Abschnitt EC der andern Seite gleich dem Rect. aus dem obern Abschnitte AE der zweiten Seite und dem untern Abschnitt DB der ersten Seite.

2) Auch das Rect. aus einer Seite AB und der Parallele DE ist gleich dem Rect. aus dem obern Abschnitt AD der genannten Seite und der Grundlinie BC. Umgekehrt: Wenn jene Rect. gleich sind, so ist DE ‖ BC.

Bew. Ziehe DF ‖ AC, so geben die hier entstandenen gleichw. Tr. sofort

$AD \cdot EC = AE \cdot DB$ und $AB \cdot DE = AD \cdot BC$.

Den Beweis für das Umgekehrte übergehe ich, da er leicht zu finden ist.

Zus. Statt Rect. kann man auch gleichw. Parallelogramme setzen, und dieses mag hier ein für allemal gesagt sein.

§. 33.

Lehrs. Wenn eine Transversale AD den Winkel BAC eines Tr. ABC halbirt, so ist das Rect. aus einer Seite AB des getheilten Winkels und dem nicht anliegenden Abschnitt DC gleich dem Rect. aus der zweiten Seite

AC

AC des halbirten Winkels und dem zweiten nicht anliegenden Abschnitt DB. Umgekehrt: Wenn gedachte Rect. gleich sind, so halbirt DA den Winkel A. (Fig. 25.)

Bew. I. Verl. CA und mache AE = AB. Ziehe BE, so ist

$x+y=2y=2E$, also $y=E$, und also AD || BE.

Mithin $AE \cdot DC = AC \cdot BD$ (§. 31.)

folglich auch $AB \cdot DC = AC \cdot BD$.

II) Und wenn $AB \cdot DC = AC \cdot BD$,

so ist auch $AE \cdot DC = AC \cdot BD$;

mithin AD || BE,

also $x = z$ und $y = E$.

Da nun $z = E$, so ist auch $x = y$.

§. 34.

Aufg. Aus dem Winkel A eines gegebenen Winkels ABC eine Transversale zu ziehen, welche die Gegenseite BC so theilt, daß ein beliebiges Parallgr. aus dieser Seite BC und einem durch die Transversale gemachten Abschnitt gleich dem diesem Parallgr. gleichwinkligen Rhombus aus der an dem Abschnitt anliegenden Seite werde. (Fig. 26.)

Aufl. Mache den Winkel BAD = Winkel C, so ist $AB \cdot AB = BC \cdot BD$. (§. 29; 31.)

Zuſ. Auch iſt $AB^2 = BC \cdot BD$. Machen wir $\angle CAE = \angle B$, ſo iſt auch $AC^2 = BC \cdot CE$. Alſo

$$AB^2 + AC^2 = BC \cdot [BD + CE]$$
$$= BC \cdot [BC - DE] = BC^2 - BC \cdot DE.$$

Wäre nun der $\angle BAC = R$, ſo hätten wir hier abermals den Pyth. Lehrſ. Dieſer Satz iſt auch umgekehrt wahr.

§. 35.

Aufg. Es ſei ABC ein gleichſchenkliger Tr., in welchem ein Winkel an der Grundlinie BC doppelt ſo groß als der Winkel A an der Spitze iſt. Man ſucht die Aufgabe, von welcher die Conſtr. eines ſolchen Tr. abhängt. (Fig. 27.)

Aufl. Man halbire einen Winkel C an der Grundlinie durch CD, ſo iſt, weil $x = A$, nach §. 29. $CB^2 = AB \cdot BD$, und da $\triangle BCD \sim \triangle ABC$ und auch $x = y = A$, ſo iſt $AD = CD = BC$;

folglich $AD^2 = AB \cdot BD$.

Es kommt alſo auf die Aufl. der Aufg. an: Eine gegebene Linie AB in D ſo zu theilen, daß das Quadrat des größern Abſchnitts gleich dem Rect. aus der ganzen Linie und dem andern Abſchnitt ſei, deren Aufl. ich hier ſo gebe (Fig. 28.):

In dem Endpunkte B errichte $BC = \frac{1}{2}AB$ per-

pendikular auf AB. Ziehe AC und mache BD = AE = AC − CB, so ist $BD^2 = AB \cdot DA$.

Bew. Ziehe BE und mache den ∠ AED = x, so ist nach §. 29.

$$AE^2 = AB \cdot AD.$$

Macht man also BD = AE, so ist auch

$$BD^2 = AB \cdot AD.$$

Anmerk. Aufl. und Beweis sind neu und äußerst einfach.

§. 36.

Lehrs. Das Quadrat der Seite eines regul. Sechsseits plus dem Quadr. von der Seite eines regul. Zehnseits ist gleich dem Quadrat von der Seite eines regul. Fünfseits (Fig. 29.).

Bew. Es sei CA = CB die Seite des regul. Sechsseits, und AB die Seite des regul. Fünfseits, so wie AD = DB die Seite eines regul. Zehnseits. Mache ∠ BCE = ∠ CBA und ziehe DE, so ist △ CBE ∽ △ BCA, also $CB^2 = AB \cdot BE$. (§. 29.) Es läßt sich nun leicht zeigen, daß CE verl. AD in F halbirt, also z = y,

daher $AD^2 = AB \cdot AE$.

Folglich $CB^2 + AD^2 = AB^2$.

§. 37.

Lehrs. Wenn man in einem Tr. ABC den Winkel A durch die Transversale AD halbirt, so

= ist das Rect. aus den Seiten AB, AC, die den getheilten Winkel einschließen, gleich dem Rect. aus den Segmenten BD, DC und dem Quadrate der Transversale AD. D. h.

$AB \cdot AC = BD \cdot DC + AD^2$, (Fig. 30.)

Bew. Mache den Winkel BCE = x und verlängere AD, bis CE geschnitten wird, so ist △ CDE ∽ △ ABD ∽ △ ACE; daher nach §. 29.

$AD \cdot DE = BD \cdot DC$,

und auch $BA \cdot AC = AE \cdot AD$

$= (AD + DE) \cdot AD$

$= AD^2 + DE \cdot AD$

$= AD^2 + BD \cdot DC$.

§. 38.

Aufg. Zwischen den Schenkeln des Winkels A sei BC || DE und AG = AB, AF = AE. Man soll beweisen, daß CF || DG oder daß ∠ BCF || ∠ EDG. (Fig. 31.)

Bew. Da die △△ ABG und AFE gleichschenklig, so ist BG || FE;

$AC \cdot AD = AE \cdot AB$, weil △ ABC ∽ △ ADE;

$AG \cdot AF = AE \cdot AB$, „ △ ABG ∽ △ AEF;

also $AC \cdot AD = AG \cdot AF$;

folglich CF || DG.

§. 39.

Lehrs. Wenn sich zwei Sehnen AB, CD innerhalb oder außerhalb des Kreises in E schneiden, so ist das Rect.

EA . EB = EC . ED. (Fig. 32.)

Bew. Ziehe AC, BD, so ist △EAC ∽ △EBD, folglich sind jene Rect. einander gleich.

§. 40.

Lehrs. In jedem Vierseit ABCD, in welchem die Gegenwinkel sich zu 2R ergänzen, ist das Rect. aus den beiden Diagonalen gleich der Summe der Rect. aus den Gegenseiten so daß AC . BD = AB . DC + AD . BC.

Bew. Aus den bekannten Eigenschaften dieses Vierseits folgt, daß

n = m, p = q. Macht man also y = x, so ist der △ABD ∽ △BCI, daher AD · BC = CI · BD, und der △ABI ∽ △DBC,

also auch AB · CD = AI · BD;

folglich AB · CD + AD · BC = AC . BD.

Anmerk. Aus dem Bisherigen ist genugsam zu ersehen daß, wo sich gleichwinklige Triangel vorfinden, durch Anwendung meines Haupt-Lehrsatzes sich sogleich die gleichen Rect. ergeben und daß also eine große Anzahl von Lehrsätzen und Aufgaben, die man bisher nur nach erwiesener Aehnlichkeit der Triangel,

ses sei z. B. das Verhältniß $\frac{n}{m}$, so muß, wenn man AB in m gleiche Theile theilt, AE genau n solcher Theile enthalten. Zieht man durch jeden der Theilungspunkte eine Parallele mit der Seite AD, so entstehen dadurch m kleine gleiche Prllgrm., wovon m im Prllgrm. AC, und n im Prllgrm. AF enthalten sind. Folglich verhalten sich diese beiden Prllgrm. zu einander wie m zu n, also wie die Grundl. AB, AE.

Gesetzt zweitens: die Grundl. AB, AE seien incommensurabel. — Wer läugnen wollte, daß in diesem Falle dieselbe Proportionalität zwischen den Prllgrm. und den Grundl. nicht Statt fände, der müßte behaupten, nicht AE sondern irgend eine andre Linie AG, die größer oder kleiner als AE ist, sei die richtige vierte Proportionallinie zu den drei andern Größen. Wir wollen also setzen, es sei AG um EG größer als AE, und es sei dann

$$\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AC}} = \frac{\text{AG}}{\text{AB}}. \quad \text{(I)}$$

Theilt man nun die Grundl. AB in gleiche Theile, welche kleiner als EG sind, so muß zwischen E und G wenigstens ein Theilpunkt H fallen. Durch diesen ziehe man die HI || AD, so entsteht ein Prllgrm. AI, dessen Grundl. AH mit AB commensurabel ist. Nach dem, was vorhin bewiesen ist, haben wir also

$$\frac{\text{Prllgrm. AI}}{\text{Prllgrm. AC}} = \frac{\text{AH}}{\text{AB}}. \quad \text{(II)}$$

Dividiren wir den Zahlenausdruck (I) mit dem Zahlenausdruck (II), so müßte sein

$$\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AI}} = \frac{\text{AG}}{\text{AH}};$$

aber $\frac{\text{Prllgrm. AF}}{\text{Prllgrm. AI}}$ ist ein ächter Bruch, und $\frac{\text{AG}}{\text{AH}}$ ein unächter Bruch, welches ein Widerspruch ist. Also kann keine Linie AG, welche **größer** als AE ist, die richtige vierte Proportionallinie zu den drei oben genannten Größen sein.

Auf ganz ähnliche Weise beweist man, daß auch keine Linie, welche **kleiner** als AE ist, die richtige vierte Proportionalgröße sein kann.

Nothwendig muß dieses also AE selbst sein.

§. 43.

Lehrs. Zwei gleichwinklige Prllgrm. verhalten sich zu einander wie die Produkte aus zwei Seiten, die einen gleichen Winkel einschließen. (Fig. 35.)

Bew. Nach §. 42. hat man

$$\frac{\text{Prllgr. AH}}{\text{Prllgr. AC}} = \frac{\text{AE}}{\text{AB}}, \text{ und } \frac{\text{Prllgr. AF}}{\text{Prllgr. AH}} = \frac{\text{AG}}{\text{AD}}.$$

Beide Gleichungen mit einander multiplicirt geben

$$\frac{\text{Prllgr. AF}}{\text{Prllgr. AC}} = \frac{\text{AE} \cdot \text{AG}}{\text{AB} \cdot \text{AD}}.$$

D. h. Das Verhältniß zweier gleichwinkligen Prllgr. ist aus dem Verhältniß der beiden Seiten, die einen

gleichen Winkel einschließen, zusammen gesetzt oder, welches dasselbe sagt, diese Prllgr. verhalten sich wie die Rect. aus den Seiten, die einen gleichen Winkel einschließen.

§ 44.

1. Zus. Zwei Rechtecke sind also den Producten aus ihren Grundl. und ihren Höhen proportional.

2. Zus. Sind zwei gleichwinklige Prllgr. einander gleich, so stehen ihre Seiten im umgekehrten Verhältniß.

Bew. Es sei $A \cdot B = a \cdot b$. Es sind also auch die Rect. aus diesen Seiten einander gleich (§. 31.), und daher auch nach §. 43. die Produkte aus den Zahlausdrücken dieser Seiten ebenfalls gleich, und folglich auch

A zu a wie b zu B.

3. Zus. Sind umgekehrt zweier gleichw. Prllgr. Seiten verkehrt proportional, so sind diese gleichw. Prllgr. gleich.

Denn, verhält sich A zu a wie b zu B,
so sind die Produkte $A \cdot B$ und $a \cdot b$ gleich, daher auch die Rect. und folglich auch die gleichw. Prllgr. aus diesen Seiten.

§ 45.

Die hier erwiesene Proportionalität zwischen den Flächenräumen der gleichw. Prllgr. und den Produkten aus ihren Seiten sichert uns das Recht, die Pro-

dukte aus der Grundl. in die Höhe eines jeden Rect. zum Maaß des Flächenraums der Rect. zu nehmen. Daß hierbei nur von den Zahlausdrücken der Grundlinie und der Höhe und von deren Produkten die Rede ist, d. h. von Produkten der Zahlen, welche angeben, wie viel Linieneinheiten die Grundlinie, und wie viel deren die Höhe enthält, versteht sich von selbst. — Eine weitere Ausführung dieser Elementarlehren gehört nicht hierher; genug, daß wir nunmehr berechtiget sind, das Zeichen $A \cdot B$ durch Prllgr. oder durch Rect. aus den Linien A, B, zu übersetzen, und das ist der geometrische Sinn desselben. Dagegen brauchen wir es nur, nach seinem arithmetischen Sinn, als Produkt zweier Linien A, B zu nehmen, um uns unmittelbar in die rechnende Geometrie zu versetzen.

§. 46.

Lehrs. Aehnliche Triangel verhalten sich wie die Quadrate ihrer gleichliegenden Seiten.

Bew. Es seien A, B die Seiten des einen, und a, b die gleichnamigen Seiten des andern Tr., so ist $\frac{b}{B} = \frac{a}{A}$.

Das Verh. des ersten Tr. zum zweiten ist aber nach §. 43.

$\frac{a \cdot b}{A \cdot B} = \frac{a}{A} \cdot \frac{b}{B}$, also auch gleich $\frac{a}{A} \cdot \frac{a}{A} = \frac{a^2}{A^2}$.

Anmerk. Es sollen noch einige Anwendungen und Erweiterungen folgen.

§. 47.

Neuer allgem. Lehrs. Das Rect. aus einer Linie AB und der Projection cd einer zweiten Linie CD auf ihr ist gleich dem Rect. aus der zweiten Linie CD und der Projection ab der ersten auf ihr. (Fig. 36.)

D. h. $AB \cdot cd = ab \cdot CD$.

Bew. Ziehe $CF \parallel cB$ und mache $CE = AB$; ziehe Ee auf CD perpendikular, so ist leicht einzusehen, daß $Ce = ab$; $CF = cd$, und also nach §. 9. oder 15. sein muß

$CE \cdot CF = Ce \cdot CD$, daher auch $AB \cdot cd = ab \cdot CD$.

Zus. Wenn also a und b zwei in einer Ebene beliebig der Größe und Lage nach gegebene grade Linien sind, so ist nach unserer in §. 13. vorgeschlagenen Bezeichnung allgemein

$a \cdot b_a = b \cdot a_b$, und in der trigonometrischen Sprache ist $b_a = b \cdot \text{Cos.}(a, b)$ und $a_b = a \cdot \text{Cos.}(a, b)$.

Anmerk. Es ist begreiflich, daß, wenn wir eine gerade Linie a sich um einen ihrer Endpunkte in der Ebene herumdrehen lassen und die damit verbundene Veränderung und Richtungen ihrer Projection auf irgend einer anderen geraden Linie b in Betrachtung ziehen wollen, wir von einem festen Anfangspunkt ausgehen müssen. — Dieser Punkt sei die Projection vom

Punkte, um welchen sich die Linie drehen soll. Die Projection einer Linie kann also in Betreff dieses Punktes der Lage nach positiv, oder auch negativ, und der Größe nach auch Null sein. Wenn von der Projection des Perimeters einer gradlinigen Figur die Rede ist, so versteht es sich, daß, um die Richtung der Projection gehörig zu schätzen, man vom Anfange an der Richtung des Umfanges der Figur folgen muß, dann ergiebt sich die Richtigkeit von No. 3 und 4 in §. 14. Die Winkel, welche die Seiten der Figur mit denjenigen Linien machen, auf welche sie projicirt werden, muß man immer von dieser Linie an nach einerlei Seite herum in Rechnung bringen.

§. 48.

Lehrs. In jeder gradlinigen Figur ist jede Seite gleich der Summe aller andern Seiten, wenn man jede von diesen mit dem Cosinus des Winkels multiplicirt, den sie mit der ersten bildet.

Bew. Dieser Fundamentalsatz der Polygonometrie ergiebt sich hier sogleich aus §. 14. No. 3.

Denn es seien a, b, c, d, .. v, w, x die Seiten einer ganz beliebigen Figur, so ist nach §. 14. No. 3.

$$x = a_x + b_x + c_x + d_x + e_x \cdots + v_x + w_x,$$

also auch nach §. 13.

$$x = a \cdot \text{Cos.}(a, x) + b \cdot \text{Cos.}(b, x) + \cdots + y \cdot \text{Cos.}(v, x) + w \cdot \text{Cos.}(w, x).$$

§. 49.

Lehrſ. Die Summe der Seiten irgend eines Vielſeits, von denen jede mit dem Coſinus des Winkels multiplicirt iſt, den ihre Richtung, im Sinne des Umfangs genommen, mit einer beliebigen in der Ebene der Lage nach gegebenen graden Linie macht, iſt = 0.

Bew. Es ſei y die der Lage nach gegebene Linie, ſo iſt nach §. 14. No. 4.

$$a_y + b_y + c_y \cdots + w_y + y_y = 0;$$

oder auch nach §. 13.

$$a \cdot \mathrm{Cos.}(a, y) + b \cdot \mathrm{Cos.}(b, y) + \cdots + x \cdot \mathrm{Cos.}(x, y) = 0.$$

§. 50.

Umkehrſ. In jedem Vielſeit iſt die Summe der Quadrate der Seiten gleich der doppelten algebraiſchen Summe der Rect. aus jeder dieſer Seiten und der Projection aller hinter ihr folgenden Seiten auf ihr.

Bew. Es iſt

$$\left.\begin{aligned} a &= b_a + c_a + d_a + \cdots + x_a \\ b &= a_b + c_b + d_b + \cdots + x_b \\ c &= a_c + b_c + d_c + \cdots + x_c \\ &\vdots \\ x &= a_x + b_x + c_x + \cdots + w_x \end{aligned}\right\} \text{§. 14. No. 3.}$$

daher auch

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= a\cdot b_a + a\cdot c_a + a\cdot d_a + \cdots + a\cdot x_a \\ b^2 &= b\cdot a_b + b\cdot c_b + \cdots + b\cdot x_b \\ c^2 &= c\cdot a_c + c\cdot b_c + \cdots + c\cdot x_c \\ &\vdots \\ x^2 &= x\cdot a_x + x\cdot b_x + \cdots + x\cdot w_x \end{aligned}\right\} \text{§. 4.}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Da nun hier } a\cdot b_a = b\cdot a_b;\ a\cdot c_a = c\cdot a_c, \text{ ꝛc.} \\ &\text{Eben ſo } b\cdot c_b = c\cdot b_c \text{ ꝛc.} \end{aligned}\right\} \text{§. 74.}$$

ſo iſt jedes Rect. doppelt da, folglich:

$$a^2 + b^2 + \cdots + x^2 = 2[a\cdot b_a + a\cdot c_a + a\cdot d_a + \cdots + b\cdot c_b + \cdots + w\cdot x_w].$$

1. Zuſ. Das obige Reſultat, in der Trig. Sprache überſetzt, giebt

$$a^2 + b^2 \cdots + x^2 = 2[ab\cdot\mathrm{Cos}(a,b) + ac\cdot\mathrm{Cos}(a,c + \cdots + bc\cdot\mathrm{Cos}(b,c) + bd\cdot\mathrm{Cos}(b,d) + \cdots + wx\cdot\mathrm{Cos}(w,x)],$$

d. h., in jeder geradlinigen Figur iſt die Summe der Quadrate dieſer Seiten gleich der doppelten Summe der Producte der Seiten, zwei und zwei mit dem Coſinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt.

2. Zuſ. $a^2 = b^2 + c^2 + \cdots + x^2 - 2[b\cdot c_b + b\cdot d_b + b\cdot e_b + \cdots + w\cdot x_w]$,

d. h., in jedem Vielſeit iſt das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der übrigen weniger der doppelten Summe der Rect. aus jeder

dieser Seiten und der Projection aller hinter ihr folgenden Seiten auf ihr. Also auch

$$a^2 = b^2 + c^2 + \cdots + x^2 - 2[bc\,\mathrm{Cos}(b,c) + bd\,\mathrm{Cos}(b,d) + \cdots + wx\,\mathrm{Cos}(w,x)],$$

oder: in jeder geradlinigen Figur ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der übrigen weniger der doppelten Summe der Produkte dieser andern Seiten, zu zweien mit dem Cosinus des eingeschlossenen Winkels multiplicirt.

§. 51.

Erkl. Ein Punkt innerhalb einer gradlinigen Figur, dessen Entfernung von einer beliebigen der Lage nach gegebenen Linie gleich dem arithmetischen Mittel von der algebraischen Summe aller Entfernungen der Winkelspitzen der Figur von dieser Linie ist, soll der Punkt der mittlern Entfernungen, und jede durch diesen Punkt gezogene grade Linie soll Axe oder Linie der mittlern Entfernungen dieser Punkte genannt werden. Dieser merkwürdige Punkt wird künftig immer durch den Buchstaben P angedeutet werden.

§. 52.

Aufg. Die Möglichkeit eines solchen Punkts darzuthun (Fig. 37.).

Anfl. Aus einem Punkt P ziehe man so viel grade Linien (Radien), als ein Vielseit Seiten hat, so daß jede dieser Linien einer entsprechenden Seite

Summe der Projectionen eines jeden dieſer Radien auf dieſer Transverſale gleich Null.

Man kann auch ſagen: ſo iſt die Summe der Produkte eines jeden dieſer Radien mit dem Coſinus des Winkels, den er mit der Richtung der Transverſale bildet, gleich Null.

Bew. Folgt unmittelbar aus §. 49. und §. 51.

§. 54.

Lehrſ. In jeder gradlinigen Figur von n Seiten iſt die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel von einem beliebigen Punct gleich der Summe der Quadrate der Radien aus dem Punkte der mittlern Entfernungen plus dem n fachen Quadrate der Entfernung des P. d. m. E. vom angenommenen Punct.

Bew. Die Winkelpunkte der Figur ſeien A, B, C, D, ... N; ferner ſei A der beliebig angenommene Punkt, von welchem nach allen Winkeln A, B, C, D, ... N gerade Linien gezogen werden, die wir der Reihe nach mit A, B, C, D, ... N bezeichnen wollen. P bezeichne den P. d. m. E., und die aus dieſem Punkt nach den Winkeln A, B, C ... N gezogenen Radien ſollen der Reihe nach mit $r, r', r'', \ldots r^{(n-1)}$

ezeichnet sein. Endlich sei e die Entfernung des Punktes P von dem Punkte A.

Es ergeben sich hier n Triangel, die alle die gemeinschaftliche Seite e haben; von den beiden andern Seiten ist die eine immer ein Radius, und die andere eine aus A gezogene Linie, daher haben wir hier aus §. 18 u. 19. folgende n Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} A^2 &= r^2 + e^2 + 2e \cdot r_e \\ B^2 &= r'^2 + e^2 + 2e \cdot r'_e \\ C^2 &= r''^2 + e^2 + 2e \cdot r''_e \\ &\vdots \\ N^2 &= r^{(n-1)2} + e^2 + 2e \cdot r_e^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

Anmerk. Daß ich die doppelten Rect. aus e und der Projection des Radius auf ihr immer positiv gezeichnet habe, darf keinen Anstoß finden, da das Zeichen + hier nur ein Operationszeichen ist; ob aber $2e \cdot r_e$ positiv oder negativ werden soll, hängt von der Lage, die r_e hat, ab.

Da nun $r_e + r'_e + \cdots + r_e^{(n-1)} = 0$ (§. 53.), so ist auch $2e \cdot r_e + 2e \cdot r'_e + \cdots + 2e \cdot r_e^{(n-1)}$

$= 2e \cdot [r_e + r'_e + \cdots + r_e^{(n-1)}] = 2e \cdot 0 = 0$;

folglich $A^2 + B^2 + \cdots + N^2 = r^2 + r'^2 + \cdots + r^{(n-1)2} + n \cdot e^2$.

Anmerk. Dieser schöne allgemeine Lehrs. ist nirgend so leicht ganz rein geometrisch erwiesen worden.

1. Zus. Die Summe $A^2 + B^2 + \cdots + N^2$ ist

am kleinsten, wenn $e = o$, folglich ist die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel einer Figur vom Punkte P ein Kleinstes.

2. Zus. Wenn der Punct A in der Peripherie eines Kreises genommen wird, der aus P mit der Entfernung e beschrieben ist, so ist

$$A^2 + B^2 + \cdots + N^2$$

für jeden Punkt A in dieser Peripherie eine constante Größe. Dieses ist der 12te Satz von Huygens Horologium oscillatorium.

3. Zus. Ist die n seitige Figur regulär, so ist, wie sich leicht darthun läßt, P der Mittelpunkt dieses regul. Polygons, daher

$A^2+B^2+\cdots+N^2 = n \cdot r^2 + n \cdot e^2 = n[r^2+e^2]$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Winkel eines regul. Polygons von einem beliebigen Punkte A eines Kreises, der mit dem Polygon einerlei Mittelpunkt hat, ist gleich der n fachen Summe des Quadrats vom Halbmesser des Polygons und des Quadrats vom Halbmesser des Kreises.

Wenn $n = 3$ und $e = r$, so ist $A^2+B^2+C^2 = 6r^2$

für $n = 6$ und $e = r$ wäre $A^2+B^2+C^2+D^2 + E^2+F^2 = 12r^2$

4. Zus. Nimmt man im 3. Zus. $e = r$ und $n = 2$, so ist $A^2 + B^2 = 4r^2 =$ dem Quadrat des Durchmessers, welches wiederum der Pythag. Lehrs. ist.

§. 55.

ehrs. Verbindet man n in einer Ebene liegende Puncte, je zwei und zwei durch grade Linien, so ist die Summe der Quadrate aller dieser Linien gleich der n fachen Summe der Quadrate der Entfernungen aller Punkte des Systems vom Punkte P.

Bew. Man denke sich den in §. 54. genannten Punkt A nach und nach in jedem der n Punkte des n betrachtenden Systems, so gehen von diesem Punkt A nach den übrigen n — 1 Punkten n — 1 Linien.

Es ergeben sich also hier n Gleichungen, deren eine Hälfte aus der Summe von n — 1 Quadraten, nämlich der Summe der Quadrate von Linien, die aus A nach allen übrigen Punkten gezogen werden, besteht, und deren andere Hälfte aus der Summe der Quadrate aller n Radien aus P bestehen, die wir durch Σr^2 angeben wollen, und aus dem n fachen Quadrat der jedesmaligen Entfernung des Punkts P von A.

In allen n Gleichungen zusammen stehen also in der Hälfte linker Hand $n \cdot (n-1)$ Quadrate. Bei einiger Aufmerksamkeit dürfte es nicht entgehen, daß jedes Quadrat zweimal da ist, und also nur $\frac{n \cdot (n-1)}{2}$ verschiedene Quadrate linker Hand doppelt genommen

wirklich vorhanden sind. Die Summen von der Hälfte rechter Hand der n Gleichungen geben, wie zu übersehen,

$$n\Sigma r^2 + n\cdot r^2 + n\cdot r'^2 + n\cdot r'^{/2} + \cdots + n\cdot r^{(n-1)_2}$$
$$= n\Sigma r^2 + n[r^2 + r'^2 + \cdots + r^{(n-1)_2}] = n\Sigma r^2 + n\Sigma r^2$$
$$= 2n\Sigma r^2.$$

Folglich ist $n\Sigma r^2$ gleich der Summe aller Quadrate von allen Linien, die je zwei Punkte des Systems verbinden.

§. 56.

Aufg. Es sei gegeben S_2 die Summe der Quadrate der Entfernungen eines Punktes von jedem der $n - 1$ andern, und Σ_2 die Summe der Quadrate der Entfernungen aller Puncte des Systems, je zwei und zwei. Man soll hieraus das Quadrat der Entfernung eines unter ihnen vom allgemeinen Punkt P finden.

Aufl. Die zu findende Enfernung sei r, so ist nach §. 54.

$S_2 = \Sigma r^2 + n\cdot r^2$, also $\Sigma r^2 = S_2 - n\cdot r^2$; nach dem vorhergehenden §. ist $n\Sigma r^2 = \Sigma_2$, also auch $\Sigma r^2 = \frac{\Sigma_2}{n}$, folglich $r^2 = \frac{n\cdot S_2 - \Sigma_2}{n^2}$.

D. h. in einem System gegebener n Punkte ist das Quadrat der Entfernung eines unter ihnen vom allgemeinen Punkte der mittlern Entfernungen gleich der

fachen Summe der Quadrate der Entfernungen dieses Punkts von allen andern, wenn man hievon die Summe der Quadrate der Entfernungen je zweier Punkte abzieht, und diese Differenz durch das Quadrat der Zahl der Punkte dividirt.

§. 57.

Anmerk. Hat irgend eine Figur von 2n Scheitelpunkten einen Mittelpunkt der Figur, d. h. einen Punct, in welchem alle durch ihn gelegten Diagonalen halbirt werden, so ist dieser Punkt auch zugleich der Punkt P. Bezeichnen wir nun die Summe der Quadrate der durch P gehenden Diagonalen mit A, die Summe der Quadrate aller übrigen Diagonalen und Seiten mit B, so ist

$$A = 2\Sigma r^2 \quad (\S.\ 55.),$$

$$2n \cdot \Sigma r^2 = A + B \quad (\S.\ 55.),$$

also $n \cdot A = A + B$,

folgl. $(n-1)\,A = B$.

So ist bei einem Parallelogramm $n = 2$; A = der Summe der Quadrate beider Diagonalen, und B die Summe der Quadrate von allen 4 Seiten,

also $A = B$, wie in §. 23.

§. 58.

Neuer Lehrs. Wenn man aus irgend einem Punkte A in jeder gradlinigen Figur ABCD ... N, deren Seiten AB, BC, CD ... MN wir in der Ordnung, wie sie folgen, mit a, b, c, d ... n bezeichnen wollen, aus die-

„ſum Punkt A nach allen Winkeln A, B, C .. N Linien AA, AB, .. AN ziehen, ſo wir in der Ordnung, wie ſie auf einander folgen, mit r, r', r'' ... $r^{(n-1)}$ bezeichnen wollen, ſo iſt

$$a \cdot r_a + b \cdot r'_b + c \cdot r'' \ldots + n \cdot r_n^{(n-1)} = a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r'''_c + \ldots + n \cdot r_n.$$

Bew. Nach §. 18. 19. iſt

$$\left.\begin{aligned} r^2 &= a^2 + r'^2 + 2a \cdot r'_a \\ r'^2 &= b^2 + r''^2 + 2b \cdot r''_b \\ r''^2 &= c^2 + r'''^2 + 2c \cdot r'''_c \\ &\vdots \\ r^{(n-1)^2} &= n^2 + r^2 + 2n \cdot r_n \end{aligned}\right\} = A$$

und

$$\left.\begin{aligned} r'^2 &= a^2 + r^2 + 2a \cdot r_a \\ r''^2 &= b^2 + r'^2 + 2b \cdot r'_b \\ r'''^2 &= c^2 + r''^2 + 2c \cdot r''_c \\ &\vdots \\ r^2 &= n^2 + r^{(n-1)^2} + 2n \cdot r_n^{(n-1)} \end{aligned}\right\} = B$$

Zieht man B von A ab, ſo reducirt ſich die erſte Hälfte der Gleichung zu Null, d. h., alle vorhandenen Quadrate vernichten ſich gegenſeitig, und die Differenz von der Summe aller Rect. in A und der

Summe aller Rect. in B ist Null, d. h., wenn die Hälfte genommen wird,

$$a \cdot r_a + b \cdot r'_b + \cdots + n \cdot r_n^{(n-1)} = a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + \cdots + n \cdot r_n.$$

§. 59.

Lehrs. Unter eben der Voraussetzung, wie in §. 58., ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2 = 2[a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r'''_c + \ldots n \cdot r_n]$$

$$\text{oder} = a[a \cdot r_a + b \cdot r'_b + c \cdot r''_c + \ldots + n \cdot r_n^{(n-1)}].$$

Bew. Wir haben aus §. 58.

$$a \cdot r_a + b \cdot r'_b + c \cdot r''_c + \cdots + n \cdot r_n^{(n-1)} = a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r'''_c + \cdots + n \cdot r_n$$

da nun

$$a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r'''_c + \cdots + n \cdot r_n = a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r'''_c + \cdots + n \cdot r_n$$

so ist

$$a(r_a + r'_a) + b(r'_b + r''_b) + \cdots + n(r^{(n-1)} + r_n) = 2[a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + \cdots + n \cdot r_n].$$

Es ist aber $r_a + r'_a = a$; $r'_b + r''_b = b$;

$$\ldots r_n^{(n-1)} + r_n = n \text{ (§. 14.)};$$

daher ist

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2 = 2[a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r'''_c + \cdots + n \cdot r_n];$$

also auch

$$a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + n^2 = 2[a \cdot r_a + b \cdot r'_b + c \cdot r''_c + \cdots + n \cdot r_n^{(n-1)}].$$

§. 60.

In die trigonometrische Sprache übersetzt steht der Lehrsatz in §. 58. so:

$$a \cdot x \cdot \mathrm{Cos}(a, x) + b \cdot x' \mathrm{Cos}(b, x') + \cdots + n \cdot x^{(n-1)} \mathrm{Cos}(n, x^{(n-1)})$$
$$= a \cdot r' \mathrm{Cos}(a, r') + b \cdot r'' \mathrm{Cos}(b, r'') + \cdots + n \cdot r \cdot \mathrm{Cos}(n, r),$$

und der Lehrsatz in §. 59. steht so;

$$a^2 + b^2 + \cdots + n^2 = 2[a \cdot r \mathrm{Cos}(a, r) + b \cdot r' \mathrm{Cos}(b, r') + \cdots + n \cdot r^{(n-1)} \mathrm{Cos}(n, r^{(n-1)})$$
$$= 2[a \cdot r' \mathrm{Cos}(a, r') + b \cdot r'' \mathrm{Cos}(b, r'') + \cdots + n \cdot r \mathrm{Cos}(n, r)].$$

Anmerk. Die Lehrsätze in §. 58. und 59. sind wegen ihrer Allgemeinheit sehr merkwürdig, und nur die Furcht, diese Abhandlung über Gebühr auszudehnen, kann mich bestimmen, die schönen Folgerungen, z. B. bei den Curven, zu welchen sie Veranlassung geben, zu übergehen; ich erlaube mir nur, zu mehrerer Versinnlichung des Satzes, zu sagen, daß wenn man über allen Seiten irgend einer n seitigen gradlinigen Figur Quadrate zeichnet, und man fällt von einem beliebigen Punkt Perpendikel auf die Seiten, so werden die Quadrate durch diese Perpendikel in zwei Rect. zerlegt.

So ist irgend ein Rect., als erstes gezählt, die Summe des 1sten, 3ten, 5ten, 7ten .... $2n-1$ten gleich der Summe des 2ten, 4ten, 6ten ... $2n$ten.

Z. B. bei einem Triangel ist $n = 3$
und also allgemein $a \cdot r_a + b \cdot r'_b + c \cdot r''_c$
$= a \cdot r'_a + b \cdot r''_b + c \cdot r_c$.

Zieht man nun die Radien r, r', r'' aus einem merkwürdigen Punkte des $\triangle$s, z. B. wo sich die 3

erpd. aus den Spitzen schneiden, oder aus dem Mittelpunkt der ein und umschriebenen Kreise, dem unkt P ꝛc., so ergeben sich sehr schöne Relationen. Nimmt man z. E. gedachten Punkt in einem rechtinklichen Triangel im Scheitel eines spitzen Winkels, ergiebt sich abermals sofort der Pythag. Lehrs. — die Ausführung davon behalte ich mir noch vor. — Ich werde nun noch einige andere nicht minder schöne Sätze kurz darstellen.

§. 61.

Lehrs. Wenn man aus einem angenommenen Punkt P n Radien $r, r', r'', r''', r'''' \ldots r^{(n-1)}$ zieht, von welchen jeder einer andern Seite einer beliebigen gradlinigen Figur gleich und welche im Sinne des Umfanges parallel gezogen sind, und man aus irgend einem andern angenommenen Punkt A, dessen Entfernung vom P E sein mag, ein Perpendikel auf jeden dieser Radien fällt, so wird die Summe der Rect.

$$r.e_r + r'.e_{r'} + r''.e_{r''} + \ldots + r^{(n-1)}.e_{r^{(n-1)}} = 0,$$

wenn man die Projectionen von e, die nicht auf die Radien selbst sondern auf ihre Verlängerung fallen, negativ nimmt. Eben

so ist, wenn wir die aus A auf die Radien $r, r', r'' \ldots r^{(n-1)}$ gefällten Perpendikel durch $p, p', p'' \ldots p^{(n-1)}$ angegeben, die Summe der Rect.

$$r \cdot p + r' \cdot p' + r'' \cdot p'' + \ldots + r^{(n-1)} \cdot p^{(n-1)} = 0.$$

Bew. Nach §. 15. haben wir folgende Rect. gleich

$$\left.\begin{aligned} r \cdot e_r &= e \cdot r_e \\ r' \cdot e_{r'} &= e \cdot r'_e \\ r'' \cdot e_{r''} &= e \cdot r''_e \\ &\vdots \\ r^{(n-1)} \cdot e_{r^{(n-1)}} &= e \cdot r_e^{(n-1)} \end{aligned}\right\}$$

Mithin auch $r \cdot e_r + r' \cdot e_{r'} + \ldots + r^{(n-1)} \cdot e_{r^{(n-1)}}$
$= e[r_e + r'_e + \ldots + r_e^{(n-1)}]$.

Da nun nach §. 14. 4, $r_e + r'_e + \ldots + r_e^{(n-1)} = 0$,

so ist $r \cdot e_r + r' \cdot e_{r'} + \ldots + r^{(n-1)} \cdot e_{r^{(n-1)}} = 0$.

Um den zweiten Theil zu beweisen, so denke man sich von den Endpunkten der Radien $r, r' \ldots r^{(n-1)}$ Perpendikularen auf die Linie AP, und bezeichne diese Perpend. mit $\pi, \pi', \pi'' \ldots \pi^{(n-1)}$, so sind nach §. 10. folgende Rect. gleich

$$\left.\begin{aligned} r \cdot p &= e \cdot \pi \\ r' \cdot p' &= e \cdot \pi' \\ r'' \cdot p'' &= e \cdot \pi'' \\ &\vdots \\ r^{(n-1)} \cdot p^{(n-1)} &= e \cdot \pi^{(n-1)} \end{aligned}\right\}.$$

Mithin $rp + r'p' + r''p'' + \cdots + r^{(n-1)} \cdot p^{(n-1)} = e \cdot [\pi + \pi' + \cdots + \pi^{(n-1)}]$.

Nun iſt $\pi + \pi' + \pi'' + \cdots + \pi^{(n-1)} = 0$. (§. 14. 4.)

(Die $\pi, \pi' \cdots \pi^{(n-1)}$ können nämlich als die Projectionen der Radien $r, r', r'' \cdots r^{(n-1)}$ auf einer Linie, die in P auf AP perpendikular iſt, angeſehen werden.)

In der trigonometriſchen Sprache ſtehen die obigen Sätze ſo:

$$r \cdot e \cdot \mathrm{Cos}(e, r) + r' \cdot e \cdot \mathrm{Cos}(e, r') + \cdots + r^{(n-1)} e \cdot \mathrm{Cos}(e, r^{(n-1)}) = 0$$

$$r \cdot e \cdot \mathrm{Sin}(e, r) + r' \cdot e \cdot \mathrm{Sin}(e, r') + \cdots + r^{(n-1)} e \cdot \mathrm{Sin}(e, r^{(n-1)}) = 0$$

Anmerk. Für den Geometer braucht es kaum erinnert zu werden, daß dieſer §. die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht von Kräften, die um einen Punkt wirken, und das Princip von der Theorie der Momente enthält. Noch muß ich bemerken, daß die in §. 24, 25, 48 bis 50, 53 bis 61 geführten Beweiſe ſo allgemein ſind, daß ſie auch für Polygone gelten, die nicht in einer Ebene liegen.

§. 62.

Auf den Eigenſchaften des in §. 51. gedachten P. d. m. E. beruhen ſo viele wichtige und ſehr ſchwierig zu beweiſende Lehrſ. der Geom., daß eine hier folgende weitere rein geom. Ausführung günſtige Aufnahme finden wird.

§. 63.

Lehrs. Von drei auf einer graden Linie der Lage nach gegebenen Punkten A, A′, A″ seien auf eine andre beliebige Linie, welche die erstere nicht zwischen den Punkten trifft, Prpd. AB, A′B′, A″B″ gefällt. Bildet man nun Rect. aus jedem dieser Prpd. und der Entfernung der übrigen beiden Punkte, so ist die Summe der den beiden äußern Punkten entsprechenden Rect. gleich einem dem Zwischen-Punct entsprechenden Rect., d. h.,

$$AB \cdot A'A'' + A'B' \cdot AA'' = A''B'' \cdot AA' \text{ (Fig. 38).}$$

Bew. Ziehe $Aa' \parallel BB'$, so ist nach §. 21.

$$A'a' \cdot AA'' = A''a'' \cdot AA'$$

dazu $AB \cdot A'A'' + AB \cdot AA'' = AB \cdot AA'$

folgl. $AB \cdot A'A'' + A'B' \cdot AA'' = A''B'' \cdot AA'$.

Zuſ. 2. Wenn die grade Linie BB′ (Fig. 39.), auf welche man die Perpd. fällt, die AA′ zwiſchen A u. A′ z. B. zwiſchen A′ u. A″ ſchneidet, ſo ändert der Prpd. aus A und aus A″ ſeine Richtung und folglich auch ſein Zeichen, und man hat die Gleich.

$$-AB \cdot A'A'' + A'B' \cdot AA'' = -A''B'' \cdot AA',$$

alſo auch $AB \cdot A'A'' - A'B' \cdot AA'' = A''B'' \cdot AA'$.

Geht BB′ durch A″, ſo verſchwindet A″B″ und man hat die Gleich.

$$-AB \cdot A'A'' + A'B' \cdot AA'' = 0$$

oder $A'B \cdot AA'' = AB \cdot A'A''$.

Zuſ. 2. Verſetzt man in Fig. 38. den Punkt A'' auf die verlängerte AA', über A' hinaus, ſo hat $A'A''$ die Richtung verändert und daher iſt hier alsdann

$$A'B' \cdot AA'' - AB \cdot A'A'' = A''B'' \cdot AA'.$$

Sollten überdem auch die Prpd. ihre Richtungen ändern, ſo muß der Zeichen wegen darauf geachtet werden.

Zuſ. 3. Es ſei $AA'' = m' \cdot x$ u. $A'A'' = m \cdot x$, ſo ergiebt ſich 1) wenn A'' zwiſchen A u. A', u. A, A', A'' auf einerlei Seite von BB' liegen: $m \cdot AB + m' \cdot A'B' = (m + m') A''B''$. 2) Sind A u. A'' auf einerlei Seite von BB' und A' auf der entgegengeſetzten, ſo iſt

$$m \cdot AB - m' \cdot A'B' = (m + m') A''B''.$$

3) Liegt A'' von A nach A' über A' hinaus, und liegen A, A', A'' auf einerlei Seite von BB', ſo hat man

$$m' \cdot A'B' - m \cdot AB = (m' - m) A''B''.$$

§. 64.

Erkl. Wenn der Punkt A'' zwiſchen A und A' liegt, ſo wird er der **Punkt der mittlern Entfernungen** der Punkte A u. A' in Bezug auf die Coefficienten m u. m' genannt. Liegt A'' auf der von A nach A' verlängerten AA', ſo wird der Punkt

nerlei Richtung in Bezug auf diese grade Linie, man die Gleich. habe:

$$mp + m'p' + m''p'' = ZY.(m + m' + m'').$$

(Fig. 40.)

Bew. Es sei z der P. d. m. E. der Punkte A und A′ für die Coeff. m und m′; und es sei Z d. P. d. m. E. der Punkte A″ und z für die Coeff. m″ u. m + m′, so hat man

$$mp + m'p' = zy \cdot (m' + m).$$

Mithin $mp + m'p' + m''p'' = zy.(m + m') + m''p''$.

Aber $zy \cdot (m + m') + m''p'' = ZY \cdot (m + m' + m'')$;

folgl. $mp + m'p' + m''p'' = ZY \cdot (m + m' + m'')$.

Anmerk. 1. Die Lage von Z muß dieselbe seyn, welches auch immer die beiden Punkte sein mögen, deren P. d. m. E. man mit dem dritten verbindet. Man muß also bew., daß AZ und A′Z die Seite A′A″ u. AA″ in dem P. d. m. E. ihrer Endp. für die corresp. Coeff. treffen, und daß auch diese graden Linien in Z so geschnitten sind, daß dieser Punkt der P. d. m. E. ihrer Endp. ist.

Es sei also z′ der P. d. m. E von A′ u. A″ für die Coeff. m′ u. m″; A″z und Az′ schneiden sich in Z. So behaupte ich, daß Z der P. d. m. E. von A, A′, A″ für die Coeff. m, m′, m″ sei.

Bew. Durch z sei zt ∥ A′A″.

Nach der Constr. ist $\frac{A''z'}{A'z'} = \frac{m'}{m''}$.

und $\frac{A'z'}{tz} = \frac{AA'}{Az} = \frac{m+m'}{m'}$;

mithin $\frac{A''z}{tz} = \frac{m+m'}{m''}$.

Aber $\frac{A''z}{tz} = \frac{A''Z}{Zt}$,

folgl. $\frac{A''Z}{Zz} = \frac{m+m'}{m''}$.

iſt alſo der P. d. m. E. der Punkte A'' u. z für ie Coeff. m'' und m + m', und iſt folgl. der P. . m. E. der Punkte A, A', A'' für die Coeff. m, a', m''.

Man zeigt eben ſo, daß $\frac{AZ}{Zz'} = \frac{m'+m''}{m}$.

ferner: die gerade Linie von A' nach dem P. d. m. E. der Punkte A u. A'' für die Coeff. m u. m'' ſchnei- et A''z in dem nämlichen Punkt Z; folglich iſt Z llerdings der P. d. m. E. der Punkte A, A', A'' ir die Coeff. m, m', m''; und es gibt nur einen lchen Punkt.

Anmerk. 2. Wenn $m = m' = m''$, ſo ergiebt ſich Z, wenn man die Winkelſp. des Tr. AA'A'' mit den Mitten der entgegengeſetzten Seiten durch grade Linien verbindet; der Durchſchnittsp. dieſer drei Linien iſt einzig, und jede iſt in zwei Theile getheilt, von welchen der eine nach der Winkelſp. doppelt ſo groß als der andere iſt.

Zuſ. 1. Es ſei ABA'B' (Fig. 41.) ein Prllgrm.,

deſſen Diag. AA', BB' ſich in C ſchneiden; eine dieſer Diag. $B'B$ ſei um BA'' gleich dieſer Diag. verlängert. So iſt B der P. d. m. E. der Punkte A, A', A''.

Bew. Im $\triangle AA'A''$ gehet $A''C$ nach der Mitte der entgegengeſetzten Seite AA' und iſt in B in zwei Theile getheilt, davon der eine BA'' doppelt ſo groß als der andere BC iſt.

Zuſ. 2. Durch eine der Winkelſpitzen B dieſes Prllgrms ſei außerhalb des Prllgrms eine beliebige grade Linie aa' gezogen. Auf dieſe grade Linie ſeien aus den übrigen Winkelſp. A, B', A' Prpd. Aa, $B'b'$, $A'a'$ gefällt. So iſt die Summe der beiden äußern Prpd. gleich der Summe der dritten.

Bew. Die Diag. $B'B$ ſei nach A'' um BA'' gleich BB' verlängert, und $A''a''$ prd. auf aa'. Weil B der P. d. m. E. der Punkte A, A', A'' iſt, und die Punkte A und A' auf einerlei Seite von der graden Linie aa' liegen, A'' aber auf der entgegengeſetzten Seite, ſo iſt $A''a'' = Aa + A'a'$; aber $A''a'' = B'b'$; folgl. $B'b' = Aa + A'a'$.

Anders. Es ſei C der Durchſchnitt der Diag. AA', BB', und Cc prpd. auf aa', ſo iſt

$$Aa + A'a' = 2Cc;$$

aber $BB' = 2BC$;

alſo $B'b' = 2Cc$;

folgl. $Aa + A'a' = B'b'$.

Man hat auch

$$Ba - Ba' = Bb'. \qquad A$$

Wenn die Linie, auf welche man die Prpd. fället, innerhalb des Prllgrms durchgehet, so ist die Summe der auf dieser Linie durch die aus A und A′ auf sie gefällten Prpd. von B an gemachten Abschnitte gleich dem Abschnitt, der von dem Prpd. aus B′ auf dieser Linie gemacht wird.

Der Beweis wird noch kürzer, wenn man bemerkt, daß die Abschnitte, welche die Prpd. machen, eigentlich die Projectionen der Seiten des △s ABB′ auf aa′ sind, und folglich nach §. 14. sehr leicht sich ergiebt, daß die Projection von einer Seite immer gleich der Summe der Projectionen aller übrigen Seiten einer geschlossenen Figur auf irgend einer Linie ist.

Wenn man von A. u. A′ auf die Diag. BB′ die Prpd. fällt, so ist nach §. 14. B gleich der Summe ihrer durch die aus A, A′ auf sie gefällten Prpd. gemachten Abschnitte.

Zus. 3. Jede Diag. eines Prllgrms geht durch den P. d. m. E. von einem ihrer Endp. und die beiden übrigen Punkte, und sie ist in diesen zwei P. d. m. E. in drei gleiche Theile getheilt.

Im Prllgrm AB A′B′, dessen Diag. sich in C halbiren, sei B′z nach der Mitte von AB gezogen, welche die Diag. AA′ in Z schneidet.

den P. d. m. E. von allen dieſen Punkten für die correſp. Coeff. finden.

Bew. Es ſei z d. P. d. m. E. von allen erſten Punkten, und zy ſei der aus dieſem Punkt auf irgend eine grade Linie gefällte Prpd. Es ſei Z d. P. d. m. E. von z u. A^{N+1} für die Coeff. m^N u. m^{N+1}, und es ſei ZY prd. auf der nämlichen graden Linie.

Nach Annahme iſt $\int m^N \cdot p^N = zy \cdot \int m^N$,

mithin $\int m^N \cdot p^N + m^{N+1} \cdot p^{N+1} = zy \cdot \int m^N + m^{N+1} \cdot p^{N+1}$;

oder $\int m^{N+1} \cdot p^{N+1} = zy \int m^N + m^{N+1} \cdot p^{N+1}$.

Aber $zy \int m^N + m^{N+1} \cdot p^{N+1} = ZY \cdot \int m^{N+1}$,

folgl. $\int m^{N+1} \cdot p^{N+1} = ZY \cdot \int m^{N+1}$.

Nun iſt aber die Beſtimmung vom P. d. m. E. für 2, 3, 4 Punkte bewieſen worden; vermehrt man ſucceſſive die Anzahl der Punkte um eine Einheit, ſo iſt ſie für eine jede beliebige Anzahl von Punkten möglich.

Wenn demnach in einer Ebene eine beliebige Anzahl von Punkten der Lage nach und correſp. Coeff. der Größe nach gegeben ſind, ſo kann man zu gleicher Zeit die Lage eines Punkts und die Größe eines correſp. Coeff. beſtimmen, ſo daß, wenn man aus den erſten Punkten und aus dem zu beſtimmenden Punkt Prpd. auf irgend eine grade Linie fallen läßt und macht nachgehends die Prod. aus dieſen Prpd. mit den correſp. Coeff., die Summe der erſtern Prod. gleich ſei

em Prod. des aus dem zu bestimmenden Punkt efällten Prpd. mit dem zu bestimmenden corresp. oeff. Nämlich, Z ist der P. d. m. E. von allen egebenen Punkten für die gegebenen Coeff., und man ird die Gleich. haben $fm^N \cdot p^N = ZY \cdot fm^N$.

Anmerk. Die Bestimmung des P. d. m. E. von einer gegebenen Anzahl Punkte für corresp. und gegebene Coeff., nach der vorhergehenden Vorschrift ausgeführt, scheint das Unangenehme zu haben, anzunehmen, daß die P. d. m. E. für jede Anzahl Punkte geringer als die gegebene Zahl bekannt sei. Diese Bestimmung kann von dieser Unannehmlichkeit befreit werden, wenn man es unmittelbar auf eine beliebige Anzahl von Punkten, wie folgt, ausführt.

§. 68.

Aus einerlei Punkt ziehe zwei beliebige grade inien z. B. prd. auf einander und nimm sie als xen. Aus allen gegebenen Punkten seien Prpd. uf diese Axen gefällt. Man mache die Prod. on diesen Prpd. mit ihren corresp. der Größe nach egebenen Coeff., u. mache für jede Axe besonders die 5umme von diesen Produkten. Jede von dieser 5umme dividire man durch die Summe der gegebenen oeff., so erhält man die Länge von zwei geraden inien. Errichte auf den zwei Axen Prpd. resp. gleich iesen zwei graden Linien und durch die Endp. dieser rpd. ziehe man grade Linien respect. prll. mit diesen

Axen, ſo iſt der Durchſchnittsp. von dieſen Prllen. d. P. d. m. E. der gegebenen Punkte für die gegebenen Coefficienten.

Dieſer Durchſchnittsp. hat (durch Conſtr.) die Eigenſchaft des P. d. m. E. in Bezug auf die zwei als Axen genommenen graden Linien. Man muß darthun, daß er es auch in Bezug auf jede andre grade Linie iſt.

Es iſt einleuchtend, daß er es in Bezug auf jede andre prll. mit einer der Axen laufende grade Linie iſt, weil alle Prpd. auf dieſer Prlle. von denen auf der mit ihr prll. laufenden Axe nur um einerlei Größe verſchieden ſind. Es wird alſo hinreichen, darzuthun, daß der Durchſchnittsp. der zwei mit den Axen prll. gezogenen graden Linien die Eigenſchaft d. P. d. m. E. in Bezug auf eine durch den Anfangsp. gezogene grade Linie habe, welche mit den Axen beliebige Winkel bildet, woraus dann folgen würde, daß er auch in Bezug auf jede andre prll. mit dieſer letztern ein ſolcher Punkt ſein werde.

Es ſei (Fig. 42.) S der Anfgsp. oder der Durchſchnittsp. beider Axen, und A ſei ein Punkt, aus welchem man auf die Axe die Prpd. AB u. Ab gefället hat; durch S ſei jede andre grade Linie gezogen, auf welche der Prpd. AC gefället worden.

Man hat nach (§. 65) $AC = SA \cdot \sin ASC = AB \cdot \cos BSC + Ab \cdot \sin BSC$. Dieſe Gleich. auf alle gegebene Punkte angewendet, ſo hat man die Gleich.

$fm^N \cdot A^N C^N = \text{Cos BSC} \cdot fm^N \cdot A^N B^N + \text{Sin BSC} fm^N \cdot Ab^N$. Es seien ZY u. Zy die aus Z, dem P. d. m. E., auf die beiden Axen gefällten Prpd., und es sei ZV der aus Z auf die dritte grade Linie SC gefällte Prpd., so hat man:

$$fm^N \cdot A^N C^N = \text{Cos BSC} \cdot ZY fm^N + \text{Sin BSC} \cdot Zy fm^N$$
$$= fm^N [ZY \text{ Cos BSC} + Zy \cdot \text{Sin BSC}] = ZV \cdot fm^N.$$

Folglich der Punkt Z, welcher in Bezug auf zwei auf einander prd. stehende Linien die Eigenschaft des P. d. m. E. hat, hat sie auch in Bezug auf jede andre, welche mit der erstern beliebige Winkel bildet.

§. 69.

Es giebt einige Figuren, für welche sich der P. d. m. E. für ihre Winkelsp. ohne alle Schwierigkeit bestimmt.

Wenn sich in einer Figur ein Punkt befindet, welcher alle durch diesen Punkt bis zu ihrem Umfang gezogene Linien halbirt, so heißt dieser Punkt der Mittelpunkt der Figur. Solche Figuren heißen symmetrische. Hat eine Figur einen Mittelp. der Figur, so ist dieser zugleich der P. d. m. E. ihrer Winkelsp.; nämlich, der aus diesem Mittelp. auf irgend eine grade Linie gefällte Prpd., so vielmal genommen als Winkelspitzen da sind, ist gleich der Summe der aus diesen Winkelsp. gefällten Prpd.

So iſt der Durchſchnittsp. der Diag. eines Prllgrms d. P. d. m. E. von ſeinen Winkelſp., und der Mittelp. einer regulären Figur von einer graden Seitenzahl iſt auch der P. d. m. E. von ihren Winkelſpitzen. Ich behaupte, daß es eben ſo ſei für die regulären Figuren von einer ungeraden Seitenzahl.

Denn verbindet man die Mitte der abwechſelnden Seiten einer regulären Figur F von einer ungeraden Anzahl Paare von Seiten, ſo erhält man eine regul. Figur F′ von einer ungraden Seitenzahl, deren Winkelſp. die Mitten von dieſen abwechſelnden Seiten ſind. Die Summe der aus den Endp. der Seite der Fig. F, auf welcher eine Winkelſp. der Fig. F′ iſt, gefällten Prpd. iſt das Doppelte von dem aus der Winkelſp. der Fig. F′, der auf dieſer Seite iſt, gefällten Prpd.; mithin iſt die Summe der Prpd. aus den Winkelſp. der Fig. F das Doppelte von der Summe der aus den Winkelſp. der Fig. F′ gefällten Prpd.; aber die erſtere Summe iſt gleich dem Prpd. aus dem Mittelp. ſo vielmal genommen, als die erſte Figur Seiten hat, und folglich iſt ſie das Doppelte von dem Prpd. aus dem Mittelp. ſo vielmal genommen, als die zweite Figur Seiten hat; demnach iſt die Summe der Prpd. aus den Winkelſpitzen der zweiten Fig. gleich dem Prpd. aus ihren Mittelp. ſo vielmal genommen, als ſie Seiten hat.

§. 70.

Nimmt man successive jede der von Z d. P. d. m. E. nach A, A', A'', ... A^N gezogenen graden Linien als Axen an, so hat man die Gleichungen:

$$m \cdot ZA + m' \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, AZA' + m'' \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, AZA''$$
$$+ m''' \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, AZA''' + \ldots$$
$$+ m^N \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, AZA^N = o,$$

$$m \cdot ZA \cdot \text{Cos}\, A'ZA + m' \cdot ZA' + m'' \cdot ZA'' \text{Cos}\, A'ZA''$$
$$+ m''' \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A'ZA''' + \ldots$$
$$+ m^N \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'ZA^N = o,$$

$$m \cdot ZA \cdot \text{Cos}\, A''ZA + m' \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, A''ZA' + m'' \cdot ZA''$$
$$+ m''' \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A''ZA''' + \ldots$$
$$+ m^N \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'''ZA^N = o,$$

$$m \cdot ZA \cdot \text{Cos}\, A'''ZA + m' \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, A'''ZA'$$
$$+ m'' \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, A''ZA'' + m''' \cdot ZA''' + \ldots$$
$$+ m^N \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'''ZA^N = o,$$

$$m \cdot ZA \cdot \text{Cos}\, A^NZA + m' \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, A^NZA'$$
$$+ m'' \cdot ZA'' \text{Cos}\, A^NZA'' + m''' ZA''' \text{Cos}\, A^NZA'''$$
$$+ \ldots + m^N \cdot ZA^N = \rho.$$

§. 71.

Man multiplicire diese Gleichungen respective mit $m \cdot ZA$, $m' \cdot ZA'$, $m'' \cdot ZA''$, $m''' \cdot ZA'''$, ... $m^N \cdot ZA^N$ und addire diese Prod., so ergiebt sich die Gleichung:

$$m \cdot m \cdot ZA^2 + m' \cdot m' \cdot ZA'^2 + m'' \cdot m'' \cdot ZA''^2$$
$$+ m''' \cdot m''' \cdot ZA'''^2 + \ldots + m^N \cdot m^N \cdot ZA^{N2}$$

$$+ 2m \cdot m' \cdot AZ \cdot ZA' \cdot \text{Cos } AZA'$$
$$+ 2m \cdot m'' \cdot AZ \cdot ZA'' \cdot \text{Cos } AZA''$$
$$+ 2m \cdot m''' \cdot AZ \cdot ZA''' \cdot \text{Cos } AZA''' + \ldots$$
$$+ 2m \cdot m^N \cdot AZ \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } AZA^N$$
$$+ 2m' \cdot m'' \cdot A'Z \cdot ZA'' \cdot \text{Cos } A'ZA''$$
$$+ 2m' \cdot m''' \cdot A'Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos } A'ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m' \cdot m^N \cdot A'Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A'ZA^N$$
$$+ 2m'' \cdot m''' \cdot A''Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos } A''ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m'' \cdot m^N \cdot A''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A''ZA^N$$
$$+ 2m''' \cdot m^N \cdot A'''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A'''ZA^N$$
$$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot A^{N-1}Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A^{N-1}ZA^N = 0.$$

§. 72.

In dieser Gleich. subst. man für $m' \cdot A'Z \cdot \text{Cos } AZA' + m'' \cdot A''Z \cdot \text{Cos } AZA'' + m''' \cdot A'''Z \cdot \text{Cos } AZA''' + \ldots + m^N \cdot A^NZ \cdot \text{Cos } AZA^N$ ihren Werth $= m \cdot AZ$, so erhält man die Gleichung:

$$m \cdot m \cdot ZA^2 + m' \cdot m' \cdot ZA'^2 + m'' \cdot m'' \cdot ZA''^2$$
$$+ m''' \cdot m''' \cdot ZA'''^2 + \ldots + m^N \cdot m^N \cdot ZA^{N2}$$
$$+ 2m' \cdot m'' \cdot A'Z \cdot ZA'' \cdot \text{Cos } A'ZA''$$
$$+ 2m' \cdot m''' \cdot A'Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos } A'ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m' \cdot m^N \cdot A'Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A'ZA^N$$
$$+ 2m'' \cdot m''' \cdot A''Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos } A''ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m'' \cdot m^N \cdot A''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A''ZA^N$$
$$+ 2m''' \cdot m^N \cdot A'''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A'''ZA^N$$
$$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot A^{N-1}Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos } A^{N-1}ZA^N.$$

Wenn alle Coeff. $m, m' \ldots m^N$ unter sich gleich sind, so hat man:

$$ZA^2 = ZA'^2 + ZA''^2 + ZA'''^2 + \ldots + ZA^{N2}$$
$$- 2A'Z \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, A'ZA'' + 2A'Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A'ZA'''$$
$$+ \ldots + 2A'Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'ZA^N$$
$$+ 2A''Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A''ZA''' + \ldots$$
$$+ 2A''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A''ZA^N$$
$$+ 2A'''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'''ZA^N$$
$$+ 2A^{N-1}Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A^{N-1}ZA^N.$$

Nämlich: das Ordt. von der Entfernung des P. m. E. von einer gegebenen Anzahl Punkte von einem eser Punkte ist gleich der Summe von der Summe der drt. der Entfern. dieses Mittelpts. von den übrigen unkten und von der doppelten Summe ihrer Rect. zu zei und zwei mit dem Cos. ihrer gegenseitigen Neigung.

§. 73.

In der Gleich. des §. 71. subst. man für das Rect. $AZ \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, AZA'$ seinen Werth $ZA^2 + ZA'^2 - AA'^2$; en diese Subst. mache man für jedes der andern ect., so findet sich nach schicklichen Reductionen:

$$m \cdot ZA^2 + m' \cdot ZA'^2 + m'' \cdot ZA''^2 + m''' \cdot ZA'''^2$$
$$+ \ldots + m^N \cdot ZA^{N2}$$
$$= \frac{m \cdot m'}{\int m^N} \cdot AA'^2 + \frac{m \cdot m''}{\int m^N} \cdot AA''^2 + \frac{m \cdot m'''}{\int m^N} \cdot AA'''^2$$
$$+ \ldots + \frac{m \cdot m^N}{\int m^N} \cdot AA^{N2}$$
$$+ \frac{m' \cdot m''}{\int m^N} \cdot A'A''^2 + \frac{m' \cdot m'''}{\int m^N} \cdot A'A''' + \ldots$$
$$+ \frac{m' \cdot m^N}{\int m^N} \cdot A'A^{N2}$$

$$+\frac{m''\cdot m'''}{\int m^N}\cdot A''A'''^2+\cdots+\frac{m''\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A''A^{N2}$$

$$+\cdots+\frac{m''\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A'''A^{N2}$$

$$+\frac{m^{N-1}\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A^{N-1}A^{N2}.$$

Nämlich: die Summe der Räume, welche zu den Quadraten der Entfernungen des P. v. m. E. von jedem der Punkte in den Verhältnissen stehen, deren Namen die gegebenen Coeff. sind, ist gleich der Summe der Räume, welche zu den Orden der Entfernungen der gegebenen Punkte zu zwei und zwei in Verhältnissen sind, deren Namen die vierte Proportionalzahl ist zu der Summe der gebebenen Coeff., und zu den beiden Coeff., welche den Punkten, deren Entfernung man nimmt, entsprechen.

Anmerk. Diesen merkwürdigen Satz hat zuerst La Grange in den Berl. Memoiren vorgetragen und, ohne Kenntniß davon zu haben, hat L'Huilier ihn später der Petersburger Akademie zugesandt.

Symbolisch. Man hat die Gleichung

$$\int m^N\cdot A^N Z^2=\int\frac{m^{N-1}\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A^{N-1}A^{N2}.$$

Wenn n die Anzahl der Punkte ist und alle Coeff. einander gleich sind, so hat man die Gleichung

$$\int A^N Z^2=\frac{1}{n}\cdot\int A^{N-1}A^{N2};\ n\cdot\int A^N Z^2=\int A^{N-1}A^{N2}.$$

Beisp.

Beisp. In einem regulären Vielecke, ist das Quadrat des Produkts aus dem Halbm. mit der Anzahl der Winkelsp. gleich der Summe der Quadrate von allen Seiten und von allen Diag. dieses Polygons.

§. 74.

Ich gehe über, zu der Bestimmung von der Lage d. P. d. m. E. in Bezug auf einen von den der Lage nach gegebenen Punkten, und in Bezug auf eine der geraden Linien, welche diese Punkte zu zwei und zwei verbinden.

Es sei eine von diesen geraden Linien, z. B. AA' genommen; aus den gebliebenen Punkten, und aus dem P. d. m. E. seien Prpd. auf AA' gefällt; und es sei ZY der Prpd. auf AA' von Z der P. d. m. E., so hat man die folgenden zwei Gleichungen:

$$ZY \cdot \int m^N = m'' \cdot AA' \cdot \operatorname{Sin} A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \operatorname{Sin} A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \operatorname{Sin} A'AA^N$$

$$AY \cdot \int m^N = m' \cdot AA' + m'' \cdot AA'' \cdot \operatorname{Cos} A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \operatorname{Cos} A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \operatorname{Cos} A'AA^N.$$

Hieraus:

$$\frac{ZY}{AY} = \operatorname{Tg.} ZAA' = \frac{m'' \cdot AA'' \cdot \operatorname{Sin} A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \operatorname{Sin} A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \operatorname{Sin} A'AA^N}{m' \cdot AA' + m'' \cdot AA'' \cdot \operatorname{Cos} A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \operatorname{Cos} A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \operatorname{Cos} A'AA^N}$$

$$+\frac{m''.m'''}{\int m^N}.A''A'''^2+\ldots+\frac{m''.m^N}{\int m^N}.A''A^{N2}$$

$$+\ldots+\frac{m'''.m^N}{\int m^N}.A'''A^{N2}$$

$$+\frac{m^{N-1}.m^N}{\int m^N}.A^{N-1}A^{N2}.$$

Nämlich: die Summe der Räume, welche zu den Quadraten der Entfernungen des P. d. m. E. von jedem der Punkte in den Verhältnissen stehen, deren Namen die gegebenen Coeff. sind, ist gleich der Summe der Räume, welche zu den Ordten der Entfernungen der gegebenen Punkte zu zwei und zwei in Verhältnissen sind, deren Namen die vierte Proportionalzahl ist zu der Summe der gebebenen Coeff., und zu den beiden Coeff., welche den Punkten, deren Entfernung man nimmt, entsprechen.

Anmerk. Diesen merkwürdigen Satz hat zuerst Grange in den Berl. Memoiren vorgetragen, ohne Kenntniß davon zu haben, hat L'Huil. ihn später der Petersburger Akademie zugesand

Symbolisch. Man hat die Gleichung

$$\int m^N.A^NZ^2=\int\frac{m^{N-1}.m^N}{\int m^N}.A^{N-}$$

Wenn n die Anzahl der einander gleich sind, so

$$\int A^NZ^2=\frac{1}{n}.\int A^{N-}$$

und $AZ^2 \cdot \int^2 m^N = [m' \cdot AA' + m'' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''$
$+ m''' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''' + \cdots$
$+ m^N \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA^N]^2$
$+ [m'' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Sin}\, A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot$
$\mathrm{Sin}\, A'AA''' + \cdots + m^N \cdot AA^N \cdot \mathrm{Sin}\, A'AA^N]^2$
$= m' \cdot m' \cdot AA'^2 + m'' \cdot m'' \cdot AA''^2$
$+ m''' \cdot m''' \cdot AA'''^2 + \cdots + m^N \cdot m^N \cdot AA^{N2}$
$+ 2m' \cdot m'' \cdot AA' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''$
$+ 2m' \cdot m''' \cdot AA' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''' + \cdots$
$+ 2m' \cdot m^N \cdot AA' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA^N$
$+ 2m'' \cdot m''' \cdot AA'' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA''' + \cdots$
$+ 2m'' \cdot m^N \cdot AA''' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA^N$
$+ 2m''' \cdot m^N \cdot AA''' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'''AA^N$
$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot AA^{N-1} \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A^{N-1}AA^N$

Subst. statt dieser letzten Rect. ihre aus den Gleich.

$2AA' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA'' = AA'^2 + AA''^2 - A'A''^2$

gezogenen Werthe; so hat man die Gleich.

$AZ^2 \cdot \int^2 m^N = [m' \cdot AA'^2 + m'' \cdot AA''^2 + m''' \cdot AA'''^2$
$+ \cdots + m^N \cdot AA^{N2}] [\int m^N - m]$
$+ 2m' \cdot m'' \cdot AA' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''$
$+ 2m' \cdot m''' \cdot AA' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''' + \cdots$
$+ 2m' \cdot m^N \cdot AA' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA^N$
$+ 2m'' \cdot m''' \cdot AA'' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA''' + \cdots$
$+ 2m'' \cdot m^N \cdot AA'' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA^N$
$+ 2m''' \cdot m^N \cdot AA''' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'''AA^N$
$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot AA^{N-1} \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A^{N-1}AA^N.$

Man hat also die Lage des Mittelp. Z, durch den W. ZAA′, welche eine aus Z zu einem der gegebenen Punkte A gezogenen Linie mit der aus diesem Punkte zu einem der übrigen Punkte gezogenen graden macht, und durch seine Entfernung von demselben Punkt.

§. 75.

Was über den P. d. m. E. von der der Lage nach gegebenen Punkten für die Größe nach gegebene Coeff. gesagt worden, kann (mit der schicklichen Zeichenänderung) auch auf den Exmittelp. der mittlern Entfernung angewandt werden.

Erstes Beisp. Es seien A und A′ (Fig. 43.) zwei der Lage nach gegebene Punkte, und es seien m und m′ zwei corresp. der Größe nach und ungleich gegebene Coeff., von welchem m der kleinere. Auf AA′ über A′ hinaus verlängert, sei der Punkt Z so bestimmt, daß $m \cdot AZ = m' \cdot A'Z$. Nachgehends auf eine beliebige grade Linie, in Bezug derer die Punkte A, A′, Z auf einerlei Seite liegen, seien die Prpd. AB, A′B′, ZY gefällt, so wird man haben (§. 64) $m \cdot AB - m' \cdot A'B' = (m' - m)\,ZY$.

Wenn $m = m'$, so kann Z nicht bestimmt werden, man sagt er sei unendlich weit entfernt; alsdann ist $m \cdot AB - m' \cdot A'B' = m\,(AB - A'B')$; es kann demnach dieser Unterschied beliebig groß sein.

Zweites Beisp. Es seien A, A′, A″ drei

der Lage nach gegebene Punkte, und es seien m, m′, m″ drei corresp. der Größe nach gegebene Coefficienten. Man kann den Punkt Z so bestimmen, daß wenn man aus allen diesen Punkten Prpd. p, p′, p″ und ZY auf eine beliebige grade Linie fallen läßt (in einerlei Richtung in Bezug auf dieser Linie) man die Gleich. habe:

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot ZY.$$

Bew. Man bestimme z d. P. d. m. E. der Punkte A und A′, für die corresp. Coeff. m und m′, und suche Z der Exmittelp. d. m. E. der Punkte z u. A″ für die Coeff. m + m′ u. m″. Dieser Punkt Z ist der Exmittelp. d. m. E. der Punkte A, A′, A″, für die Coeff. m, m′ u. m″.

Damit Z zu bestimmen sei, muß man m + m′ nicht gleich m″ haben. Wenn $m + m' > m''$; so ist Z auf A″z, von A″ aus über z hinaus verlängert, und man hat die Gleichung:

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot ZY.$$

Wenn $m + m' < m''$, so liegt Z auf A″z von z aus verlängert über A″ hinaus, und man hat die Gleichung:

$$m'' \cdot p'' - (m \cdot p + m' \cdot p') = (m'' - m - m') \cdot ZY.$$

Wenn $m + m' = m''$; so kann Z nicht bestimmt werden, man sagt er sei unendlich weit entfernt, und die Differenz

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p''$$ kann beliebig sein.

Wenn z mit A'' zusammenfällt, so fällt auch Z mit beiden Punkte zusammen, und man hat

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot p''$$

Liegen A, A' auf einer Seite der Linie, auf welcher die Prpd. errichtet worden, und A'' auf der andern Seite, so hat man

$$m \cdot p + m' \cdot p' + m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot ZY.$$

Drittes Beisp. Es seien A, A', A'', A''' vier der Lage nach gegebene Punkte, und es seien m, m', m'', m''' gegebene Coeff.; es sei Z ein fünfter Punkt. Aus diesen Punkten seien auf einer graden Linie Prpd. p, p', p'', p''', ZY in einerlei Richtung gefällt.

1) Man kann Z so bestimmen, daß

$$m \cdot p + m' \cdot p' + m'' \cdot p'' - m''' \cdot p''' = (m + m' + m'' - m''') \cdot ZY.$$

Aufl. Es sei z d. P. d. m. E. von A, A', A'' für die Coeff. m, m', m''; und Z sei der Exmittelp. von z u. A''' für die Coeff. $m + m' + m''$ u. m'''. So ist Z der gesuchte Punkt.

2) Man kann Z so bestimmen, daß

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' - m''' \cdot p''' = (m + m' - m'' - m''') \cdot ZY.$$

Aufl. Es sei z d. P. d. m. E. von A u. A' für die Coeff. m und m', und es sei z' d. P. d. m. E. von A'' u. A''' für die Coeff. m'' und m'''; endlich sei Z der Exmittelp. d. m. E. von z u. z' für die

Coeff. $m + m'$ u. $m'' + m'''$. So iſt Z der geſuchte Punkt.

Damit Z beſtimmt werden kann, muß $m + m'$ nicht gleich $m'' + m'''$ ſein; wenn dieſe beiden Summen gleich ſind, ſo iſt die Diff.

$(m+m')zy-(m''+m''')z'y' = (m+m'(zy-z'y')$; und wenn z u. z' zuſammenfallen, ſo iſt die Aufg. unbeſtimmt.

In einem Prllgrm. ſind alſo die Summen der aus entgegengeſetzten Winkelſp. auf irgend eine grade Linie gefällten Prpd. einander gleich, oder die Diff. dieſer zwei Summen iſt Null.

Allgem. Es ſei eine beliebige Anzahl Punkte der Lage nach gegeben, und es ſeien corresp. Coeff. der Größe nach gegeben. Es ſeien andre Punkte auch der Lage nach gegeben, und auch corresp. Coeff. der Größe nach gegeben. Es ſei der P. d. m. E. der erſten Punkte für die gegebenen Coeff. geſucht; es ſei auch d. P. d. m. E. der zweiten Punkte für die gegebenen Coeff. geſucht; es ſei (wenn es möglich) der Exmittelp. d. m. E. von dieſen zwei Mittelp. für die Summe der corresp. Coeff. beſtimmt. Er wird der Exmittelp. vom Syſtem der erſten Punkte und vom Syſtem der zweiten Punkte für die gegeb. Coeff. ſein.

Die in §§. 70 u. 73 vorgetragenen Sätze haben ihre corresp. für den Exmittelp. d. m. E., wenn man

die Zeichen der Coeff. von den dem zweiten Punktensysteme correspp. Gliedern ändert.

Ich gehe zu der Anwendung der Eigenschaften des P. d. m. E. bei gradlinigen Figuren über.

§. 76.

Lehrs. Aus einem in der Ebene eines Triangels genommenen Punkte, seien immer nach einerlei Seite gewendet Prllen. mit den Seiten gezogen und ihnen gleich gemacht. Ich behaupte, daß dieser Punkt d. P. d. m. E. von den Endp. dieser Linien ist.

Da alle der Annahme gemäß erzeugte Systeme gerader Linien, unter sich nur in der Lage verschieden sind, so ist es hinreichend zu zeigen, daß der Satz wahr ist, für das, durch einen der Winkelsp. des Tr. erzeugtes Liniensystem.

Es sei also SAA′ ein Tr., durch einer der Winkelsp. S sei Sa′ ∥ AA′ gezogen, und es sei A′S über S hinaus verlängert um Sa″ = SA′. Ich behaupte, daß S d. P. d. m. E. von A, a′, a″ ist.

Bew. Es seien Aa′, a′a″, a″A gezogen, und a′S treffe Aa″ in a. Da Sa ∥ AA′, so sind die Tr. Aa″A′, aa″S ähnlich; aber A′a″ = 2Sa″, also Aa″ = 2aa″, u. AA′ = 2Sa, aber AA′ = Sa′, mithin Sa′ = 2Sa; folgl. ist in dem Tr. Aa′a″ die grade Linie a′a von der Spitze a′ bis zur Mitte der Gegenseite in S, so

$$+ 2m \cdot m' \cdot AZ \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, AZA'$$
$$+ 2m \cdot m'' \cdot AZ \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, AZA''$$
$$+ 2m \cdot m''' \cdot AZ \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, AZA''' + \ldots$$
$$+ 2m \cdot m^N \cdot AZ \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, AZA^N$$
$$+ 2m' \cdot m'' \cdot A'Z \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, A'ZA''$$
$$+ 2m' \cdot m''' \cdot A'Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A'ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m' \cdot m^N \cdot A'Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'ZA^N$$
$$+ 2m'' \cdot m''' \cdot A''Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A''ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m'' \cdot m^N \cdot A''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A''ZA^N$$
$$+ 2m''' \cdot m^N \cdot A'''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'''ZA^N$$
$$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot A^{N-1}Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A^{N-1}ZA^N = 0.$$

§. 72.

In dieſer Gleich. ſubſt. man für $m' \cdot A'Z \cdot \text{Cos}\, AZA' + m'' \cdot A''Z \cdot \text{Cos}\, AZA'' + m''' \cdot A'''Z \cdot \text{Cos}\, AZA''' + \ldots + m^N \cdot A^NZ \cdot \text{Cos}\, AZA^N$ ihren Werth $= mAZ$, ſo erhält man die Gleichung:

$$m \cdot m \cdot ZA^2 + m' \cdot m' \cdot ZA'^2 + m'' \cdot m'' \cdot ZA''^2$$
$$+ m''' \cdot m''' \cdot ZA'''^2 + \ldots + m^N \cdot m^N \cdot ZA^{N2}$$
$$+ 2m' \cdot m'' \cdot A'Z \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, A'ZA''$$
$$+ 2m' \cdot m''' \cdot A'Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A'ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m' \cdot m^N \cdot A'Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'ZA^N$$
$$+ 2m'' \cdot m''' \cdot A''Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A''ZA''' + \ldots$$
$$+ 2m'' \cdot m^N \cdot A''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A''ZA^N$$
$$+ 2m''' \cdot m^N \cdot A'''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'''ZA^N$$
$$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot A^{N-1}Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A^{N-1}ZA^N.$$

Wenn alle Coeff. $m, m' \ldots m^N$ unter ſich gleich ſind, ſo hat man:

$$ZA^2 = ZA'^2 + ZA''^2 + ZA'''^2 + \ldots + ZA^{N2}$$
$$+ 2A'Z \cdot ZA'' \cdot \text{Cos}\, A'ZA'' + 2A'Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A'ZA'''$$
$$+ \ldots + 2A'Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'ZA^N$$
$$+ 2A''Z \cdot ZA''' \cdot \text{Cos}\, A''ZA''' + \ldots$$
$$+ 2A''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A''ZA^N$$
$$+ 2A'''Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A'''ZA^N$$
$$+ 2A^{N-1}Z \cdot ZA^N \cdot \text{Cos}\, A^{N-1}ZA^N.$$

Nämlich: das Qdt. von der Entfernung des P. d. m. E. von einer gegebenen Anzahl Punkte von einem dieser Punkte ist gleich der Summe von der Summe der Qdrt. der Entfern. dieses Mittelpts. von den übrigen Punkten und von der doppelten Summe ihrer Rect. zu zwei und zwei mit dem Cos. ihrer gegenseitigen Neigung.

§. 73.

In der Gleich. des §. 71. subst. man für das Rect. $2AZ \cdot ZA' \cdot \text{Cos}\, AZA'$ seinen Werth $ZA^2 + ZA'^2 - AA'^2$; eben diese Subst. mache man für jedes der andern Rect., so findet sich nach schicklichen Reductionen:

$$m \cdot ZA^2 + m' \cdot ZA'^2 + m'' \cdot ZA''^2 + m''' \cdot ZA'''^2$$
$$+ \ldots + m^N \cdot ZA^{N2}$$
$$= \frac{m \cdot m'}{\int m^N} \cdot AA'^2 + \frac{m \cdot m''}{\int m^N} \cdot AA''^2 + \frac{m \cdot m'''}{\int m^N} \cdot AA'''^2$$
$$+ \ldots + \frac{m \cdot m^N}{\int m^N} \cdot AA^{N2}$$
$$+ \frac{m' \cdot m''}{\int m^N} \cdot A'A''^2 + \frac{m' \cdot m'''}{\int m^N} \cdot A'A'' + \ldots$$
$$+ \frac{m' \cdot m^N}{\int m^N} \cdot A'A^{N2}$$

$$+\frac{m''\cdot m'''}{\int m^N}\cdot A''A'''^2+\ldots+\frac{m''\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A''A^{N2}$$

$$+\ldots+\frac{m''\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A'''A^{N2}$$

$$+\frac{m^{N-1}\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A^{N-1}A^{N2}.$$

Nämlich: die Summe der Räume, welche zu den Quadraten der Entfernungen des P. v. m. E. von jedem der Punkte in den Verhältnissen stehen, deren Namen die gegebenen Coeff. sind, ist gleich der Summe der Räume, welche zu den Orden der Entfernungen der gegebenen Punkte zu zwei und zwei in Verhältnissen sind, deren Namen die vierte Proportionalzahl ist zu der Summe der gebebenen Coeff., und zu den beiden Coeff., welche den Punkten, deren Entfernung man nimmt, entsprechen.

Anmerk. Diesen merkwürdigen Satz hat zuerst La Grange in den Berl. Memoiren vorgetragen und, ohne Kenntniß davon zu haben, hat L'Huilier ihn später der Petersburger Akademie zugesandt.

Symbolisch. Man hat die Gleichung

$$\int m^N\cdot A^NZ^2=\int\frac{m^{N-1}\cdot m^N}{\int m^N}\cdot A^{N-1}A^{N2}.$$

Wenn n die Anzahl der Punkte ist und alle Coeff. einander gleich sind, so hat man die Gleichung

$$\int A^NZ^2=\frac{1}{n}\cdot\int A^{N-1}A^{N2};\ n\cdot\int A^NZ^2=\int A^{N-1}A^{N2}.$$

Beisp.

Beisp. In einem regulären Vielfelt, ist das Quadrat des Produkts aus dem Halbm. mit der Anzahl der Winkelsp. gleich der Summe der Quadrate von allen Seiten und von allen Diag. dieses Polygons.

§. 74.

Ich gehe über, zu der Bestimmung von der Lage d. P. d. m. E. in Bezug auf einen von den der Lage nach gegebenen Punkten, und in Bezug auf eine der geraden Linien, welche diese Punkte zu zwei und zwei verbinden.

Es sei eine von diesen geraden Linien, z. B. AA' genommen; aus den gebliebenen Punkten, und aus dem P. d. m. E. seien Prpd. auf AA' gefällt; und es sei ZY' der Prpd. auf AA' von Z der P. d. m. E., so hat man die folgenden zwei Gleichungen:

$$ZY' \cdot \int m^N = m'' \cdot AA' \cdot \sin A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \sin A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \sin A'AA^N$$

$$AY' \cdot \int m^N = m' \cdot AA' + m'' \cdot AA'' \cdot \cos A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \cos A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \cos A'AA^N.$$

Hieraus:

$$\frac{ZY'}{AY'} = \operatorname{Tg}. ZAA' = \frac{m'' \cdot AA'' \cdot \sin A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \sin A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \sin A'AA^N}{m' \cdot AA' + m'' \cdot AA'' \cdot \cos A'AA'' + m''' \cdot AA''' \cdot \cos A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \cos A'AA^N}$$

und $AZ^2 \cdot \int^2 m^N = [m' \cdot AA' + m'' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''$
$+ m''' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''' + \ldots$
$+ m^N \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA^N]^2$
$+ [m'' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Sin}\, A'AA'' + m''' \cdot AA'''$
$\mathrm{Sin}\, A'AA''' + \ldots + m^N \cdot AA^N \cdot \mathrm{Sin}\, A'AA^N]^2$.
$= m' \cdot m' \cdot AA'^2 + m'' \cdot m'' \cdot AA''^2$
$+ m''' \cdot m''' \cdot AA'''^2 + \ldots + m^N \cdot m^N \cdot AA^{N2}$
$+ 2m' \cdot m'' \cdot AA' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''$
$+ 2m' \cdot m''' \cdot AA' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''' + \ldots$
$+ 2m' \cdot m^N \cdot AA' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA^N$
$+ 2m'' \cdot m''' \cdot AA'' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA''' + \ldots$
$+ 2m'' \cdot m^N \cdot AA''' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA^N$
$+ 2m''' \cdot m^N \cdot AA''' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'''AA^N$
$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot AA^{N-1} \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A^{N-1}AA^N$.

Subst. statt dieser letzten Rect. ihre aus den Gleich.

$2AA' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA'' = AA'^2 + AA''^2 - A'A''^2$

gezogenen Werthe; so hat man die Gleich.

$AZ^2 \cdot \int^2 m^N = [m' \cdot AA'^2 + m'' \cdot AA''^2 + m''' \cdot AA'''^2$
$+ \ldots + m^N \cdot AA^{N2}] [\int m^N - m]$
$+ 2m' \cdot m'' \cdot AA' \cdot AA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''$
$+ 2m' \cdot m''' \cdot AA' \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA''' + \ldots$
$+ 2m' \cdot m^N \cdot AA' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'AA^N$
$+ 2m'' \cdot m''' \cdot AA'' \cdot AA''' \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA''' + \ldots$
$+ 2m'' \cdot m^N \cdot AA'' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A''AA^N$
$+ 2m''' \cdot m^N \cdot AA''' \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A'''AA^N$
$+ 2m^{N-1} \cdot m^N \cdot AA^{N-1} \cdot AA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A^{N-1}AA^N$.

Man hat also die Lage des Mittelp. Z, durch den W. ZAA′, welche eine aus Z zu einem der gegebenen Punkte A gezogenen Linie mit der aus diesem Punkte zu einem der übrigen Punkte gezogenen graden macht, und durch seine Entfernung von demselben Punkt.

§. 75.

Was über den P. d. m. E. von der der Lage nach gegebenen Punkten für die Größe nach gegebene Coeff. gesagt worden, kann (mit der schicklichen Zeichenänderung) auch auf den Exmittelp. der mittlern Entfernung angewandt werden.

Erstes Beisp. Es seien A und A′ (Fig. 43.) zwei der Lage nach gegebene Punkte, und es seien m und m′ zwei corresp. der Größe nach und ungleich gegebene Coeff., von welchem m der kleinere. Auf AA′ über A′ hinaus verlängert, sei der Punkt Z so bestimmt, daß $m \cdot AZ = m' \cdot A'Z$. Nachgehends auf eine beliebige grade Linie, in Bezug derer die Punkte A, A′, Z auf einerlei Seite liegen, seien die Prpd. AB, A′B′, ZY gefällt, so wird man haben (§. 64) $m \cdot AB - m' \cdot A'B' = (m' - m)\, ZY$.

Wenn $m = m'$, so kann Z nicht bestimmt werden, man sagt er sei unendlich weit entfernt; alsdann ist $m \cdot AB - m' \cdot A'B' = m\,(AB - A'B')$; es kann demnach dieser Unterschied beliebig groß sein.

Zweites Beisp. Es seien A, A′, A″ drei

der Lage nach gegebene Punkte, und es seien m, m′, m″ drei corresp. der Größe nach gegebene Coefficienten. Man kann den Punkt Z so bestimmen, daß wenn man aus allen diesen Punkten Perpd. p, p′, p″ auf XY auf eine beliebige grade Linie fallen läßt (in einerlei Richtung in Bezug auf dieser Linie) man die Gleich. habe:

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot ZY.$$

Bew. Man bestimme z d. M. d. m. E. der Punkte A und A′, für die corresp. Coeff. m und m′, und suche Z der Ermittelp. d. m. E. der Punkte z u. A″ für die Coeff. m + m′ u. m″. Dieser Punkt Z ist der Ermittelp. d. m. E. der Punkte A, A′, A″, für die Coeff. m, m′ u. m″.

Damit Z zu bestimmen sei, muß man m + m′ nicht gleich m″ haben. Wenn $m + m' > m''$; so ist Z auf A″z, von A″ aus über z hinaus verlängert, und man hat die Gleichung:

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot ZY.$$

Wenn $m + m' < m''$, so liegt Z auf A″z von z aus verlängert über A″ hinaus, und man hat die Gleichung:

$$m'' \cdot p'' - (m \cdot p + m' \cdot p') = (m'' - m - m') \cdot ZY.$$

Wenn $m + m' = m''$; so kann Z nicht bestimmt werden, man sagt er sei unendlich weit entfernt, und die Differenz

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p''$$ kann beliebig sein.

Wenn z mit A'' zusammenfällt, so fällt auch Z mit beiden Punkte zusammen, und man hat

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot p''$$

Liegen A, A' auf einer Seite der Linie, auf welcher die Prpd. errichtet worden, und A'' auf der andern Seite, so hat man

$$m \cdot p + m' \cdot p + m'' \cdot p'' = (m + m' - m'') \cdot ZY.$$

Drittes Beisp. Es seien A, A', A'', A''' vier der Lage nach gegebene Punkte, und es seien m, m', m'', m''' gegebene Coeff.; es sei Z ein fünfter Punkt. Aus diesen Punkten seien auf einer graden Linie Prpd. p, p', p'', p''', ZY in einerlei Richtung gefällt.

1) Man kann Z so bestimmen, daß

$$m \cdot p + m' \cdot p' + m'' \cdot p'' - m''' \cdot p''' = (m + m' + m'' - m''') \cdot ZY.$$

Aufl. Es sei z d. P. d. m. E. von A, A', A'' für die Coeff. m, m', m''; und Z sei der Exmittelp. von z u. A''' für die Coeff. $m' + m' + m''$ u. m'''. So ist Z der gesuchte Punkt.

2) Man kann Z so bestimmen, daß

$$m \cdot p + m' \cdot p' - m'' \cdot p'' - m''' \cdot p''' = (m' + m' - m'' - m''') \cdot ZY.$$

Aufl. Es sei z d. P. d. m. E. von A u. A' für die Coeff. m und m', und es sei z' d. P. d. m. E. von A'' u. A''' für die Coeff. m'' und m'''; endlich sei Z der Exmittelp. d. m. E. von z u. z' für die

Coeff. $m + m'$ u. $m'' + m'''$. So ist Z der gesuchte Punkt.

Damit Z bestimmt werden kann, muß $m + m'$ nicht gleich $m'' + m'''$ sein; wenn diese beiden Summen gleich sind, so ist die Diff.

$(m+m')zy-(m''+m'')z'y' = (m+m'(zy-z'y')$; und wenn z u. z' zusammenfallen, so ist die Aufg. unbestimmt.

In einem Prllgrm. sind also die Summen der aus entgegengesetzten Winkelsp. auf irgend eine grade Linie gefällten Prpd. einander gleich, oder die Diff. dieser zwei Summen ist Null.

Allgem. Es sei eine beliebige Anzahl Punkte der Lage nach gegeben, und es seien corresp. Coeff. der Größe nach gegeben. Es seien andre Punkte auch der Lage nach gegeben, und auch corresp. Coeff. der Größe nach gegeben. Es sei der P. d. m. E. der ersten Punkte für die gegebenen Coeff. gesucht; es sei auch d. P. d. m. E. der zweiten Punkte für die gegebenen Coeff. gesucht; es sei (wenn es möglich) der Exmittelp. d. m. E. von diesen zwei Mittelp. für die Summe der corresp. Coeff. bestimmt. Er wird der Exmittelp. vom System der ersten Punkte und vom System der zweiten Punkte für die gegeb. Coeff. sein.

Die in §§. 70 u. 73 vorgetragenen Sätze haben ihre corresp. für den Exmittelp. d. m. E., wenn man

die Zeichen der Coeff. von den dem zweiten Punktensysteme correspp. Gliedern ändert.

Ich gehe zu der Anwendung der Eigenschaften des P. d. m. E. bei gradlinigen Figuren über.

§. 76.

Lehrs. Aus einem in der Ebene eines Triangels genommenen Punkte, seien immer nach einerlei Seite gewendet Prllen. mit den Seiten gezogen und ihnen gleich gemacht. Ich behaupte, daß dieser Punkt d. P. d. m. E. von den Endp. dieser Linien ist.

Da alle der Annahme gemäß erzeugte Systeme gerader Linien, unter sich nur in der Lage verschieden sind, so ist es hinreichend zu zeigen, daß der Satz wahr ist, für das, durch einen der Winkelsp. des Tr. erzeugtes Liniensystem.

Es sei also SAA' ein Tr., durch einer der Winkelsp. S sei $Sa' \parallel AA'$ gezogen, und es sei $A'S$ über S hinaus verlängert um $Sa'' = SA'$. Ich behaupte, daß S d. P. d. m. E. von A, a', a'' ist.

Bew. Es seien Aa', $a'a''$, $a''A$ gezogen, und $a'S$ treffe Aa'' in a. Da $Sa \parallel AA'$, so sind die Tr. $Aa''A'$, $aa''S$ ähnlich; aber $A'a'' = 2Sa''$, also $Aa'' = 2aa''$, u. $AA' = 2Sa$, aber $AA' = Sa'$, mithin $Sa' = 2Sa$; folgl. ist in dem Tr. $Aa'a''$ die grade Linie $a'a$ von der Spitze a' bis zur Mitte der Gegenseite in S, so

in zwei Theile getheilt, daß Sa' doppelt so groß als Sa ist; folgl. (§. 65.) ist S d. P. d. m. E. von A, a', a''.

Zweite Beisp. Es sei (Fig. 45.) $SAA'A''$ ein Vierseit. Durch eine Winkelsp. S, seien Sa', Sa'' respect. gleich und prllel. zu AA', $A'A''$ gezogen, und $A''S$ sei über S hinaus um $Sa''' = SA''$ verlängert; so ist S d. P. d. m. E. von A, a', a'', a'''.

Bew. Es sei $A'S$ über S hinaus um $Sa'' = SA'$ verlängert.

Im Tr. ASA' ist S d. P. d. m. E. von A, a', a''; und im Tr. $A'SA''$ ist er auch d. P. d. m. E. von A', a'', a'''; folgl. ist S d. P. d. m. E. von A, a', a'', a'''. Aber, weil $SA' = Sa''$, so ist S auch d. P. d. m. E. der übrigen Punkte A, a', a'', a'''.

Dritt. Beisp. Es sei $SAA'A''A'''$ ein Fünfseit. Durch S seien gezogen Sa', Sa'', Sa''', respect. gleich und prllel. zu den Seiten AA', $A'A''$, $A''A'''$; und es sei $A'''S$ verlängert um $Sa^{IV} = SA'''$. So ist S d. P. d. m. E. von A, a', a'', a''', a^{IV}.

Bew. Man verlängere die Diag. $A'S$ u. $A''S$ um $Sa'' = SA'$ u. $Sa''' = SA''$.

Nach dem ersten Beisp. ist S d. P. d. m. E. von jedem der Systeme A, a', a''; A', a'', a'''; A'', a''', a^{IV}; mithin ist er auch d. P. d. m. E. von allen diesen Punkten zusammen genommen; weil aber $SA' = Sa''$ u. $SA'' = Sa'''$; so ist S auch d. P. d.

m. E. von A′, a′′, a′′′, a′′′′; folgl. ist S auch d. P. d. m. E. der übrigen Punkte A, a′, a′′, a′′′, a′′′′.

Man beweist eben so, daß der Satz successive für Polygone wahr ist, deren Winkelsp. nach und nach um eine zunehmen: Nämlich der Punkt S ist d. P. d. m. E. der übrig gebliebenen Winkelsp. der Figur, der Endp. der durch S prll. mit den Seiten gezogenen Linien, und der Endp. von den Verlängerungen der Diag.; er ist aber auch d. P. d. m. E. von den Endp. der Diag. und ihrer Verlängerung; folglich ist er d. P. d. m. E. der übrigen Punkte.

Anmerk. Alles was über Prllen. mit den Seiten einer gradlinien Figur gesagt ist, ist gleichfalls wahr für die Prpd. auf diesen Seiten, und gleich diesen Seiten oder ihnen proportionirt; vorausgesetzt, daß diese Prpd. in einerlei Sinn, nämlich innerhalb oder außerhalb der Figur oder umgekehrt gezogen sind. Man hat also auch den folgenden Lehrsatz.

Von einem beliebigen Punkt in einer ebenen Fig. feien auf ihre Seiten, von diesem Punkt aus, und immer in einerlei Sinn gedrehet, Prpd. diesen Seiten proportional gefället; so ist dieser Punkt d. P. d. m. E. von den Endp. dieser geraden Linien.

Bew. Der von zwei Prpd. gebildete Winkel, ist gleich dem W., den die zwei Linien auf welche jene Prpd. gefällt werden bilden. Die Sammlungen von zwei und zwei gleichen graden Linien, in deren eine diese Linien prllel zu der Lage nach gegebene grade Linien sind,

und in der andern sie auf ihnen Perpd. sind, können demnach sich untereinander decken.

§. 77.

In dem vorhergehenden Satz, kann man bei gradlinigen Fig. die Gleich. vom P. d. m. E., welche in §. 68. und ferner in §. 70 u. 72. enthaltenen Folgerungen anwenden. Nun hat für eine beliebige Seite SA die Gleichung:

$$SA + Sa' \cdot \mathrm{Cos}\,ASa' + Sa'' \cdot \mathrm{Cos}\,ASa'' + Sa''' \cdot \mathrm{Cos}\,ASa''' + \ldots + Sa^{N-1} \cdot \mathrm{Cos}\,ASa^{N-1} + Sa^{N} \cdot \mathrm{Cos}\,ASa^{N} = 0.$$

§. 78.

Erkl. Die Mitte einer graden Linie ist d. P. d. m. E. der Punkte, die je zwei gleich weit davon entfernt sind; daher wird die Mitte einer graden Linie auch d. P. d. m. E. von dieser graden Linie genannt.

Es sei ein beliebiges System von graden Linien: Es seien die Prod. von jeder dieser Linien mit der aus ihrer Mitte auf eine beliebige Axe gefällte Prpd. gemacht, und es werde die Summe dieser Produkte genommen. Diese Summe sei in ein Rect. verwandelt, dessen eine Seite die Summe aller dieser graden Linien; so wird die andre Seite die Entfernung der Axe von dem d. P. d. m. E. von allen diesen graden Linien sein; um also, d. P. d. m. E. von einer beliebigen Anzahl grader Linien zu finden, muß man d. P. d. m. E. ihrer Mitten für diese grade Linie selbst als corresp. Coeff. finden.

Wenn man eine grade Linie um eine beliebige Axe sich herumdrehen läßt, so ist die durch diese Linie erzeugte Fläche gleich einem Rect., welche die Erzeugungslinie zur Höhe, und zur Grundl., die durch ihre Mitte erzeugte Peripherie hat; demnach ist sie proportional dem Rect. aus dieser Linie und der Entf. ihrer Mitte von der Umdrehungsaxe; folglich ist die durch Umdrehung eines Systems von graden Linien um eine Axe, in Bezug derer sie auf einerlei Seite liegen, erzeugte Fläche, gleich einem Rect., dessen eine Seite die Summe dieser graden Linien, und dessen andre Seite die durch ihren P. d. m. E. beschriebene Peripherie ist. Mithin, wenn das System der Linie dasselbe bleibt, so ist die, durch ihre Umdrehung um eine Axe erzeugte Fläche proportional der Entf. dieser Axe v. d. P. d. m. E. des Erzeugungssystems.

Kennt man übrigens die durch das System dieser Linien erzeugte Fläche, so kann man hieraus d. P. d. m. E. bestimmen.

Beisp. Es sei ein im Kreise eingeschr. reguläres Polygon von einer graden Seitenzahl, durch zwei Gegenwinkelsp. sei einer der Durchm. dieses Kreises gezogen; dieses halbe Polygon drehe sich um diesen Durchm. Es ist bekannt, daß die, durch die Umdrehung des Perimeters, von diesen halben Polygon erzeugte Oberfläche gleich ist dem Rect. aus dem Durchm. in der Peripherie, dessen Halbm. das Apothem des Polygons

ist; aber diese Oberfläche ist auch gleich einem Rect., dessen eine Seite gleich dem halben Perimeter des Polygons, und dessen andere Seite die Peripherie ist, deren Halbm. die Entf. d. P. d. m. E. dieses halben Perimeters von der Axe ist; folglich ist der Abstand d. P. d. m. E. dieses halben Perimeters von der Axe eine vierte Proportionale zu diesem halben Umfange, zum Durchm. und zur Apotheme.

Aber eine krummlinige Figur ist die Gränze der ein- und umschr. gradlinigen Figuren; und die durch Umdrehung einer krummen Linie erzeugte Oberfläche ist auch die Gränze der durch den Umring dieser Figuren erzeugten Oberfläche. Mithin kann man auf die krummlinigen Figuren anwenden was für die gradlinigen Figuren wahr ist, in sofern es von ihrer Seitenzahl unabhängig ist. Folglich, wenn eine Curve gegeben ist, und man läßt sie um eine Axe drehen, so hängt die durch diese Umdrehung erzeugte Oberfläche bloß von der Entf. eines gewissen Punkts, den man den P. d. m. E. dieser Curve nennt, von dieser Axe ab.

Beisp. Es seien in dem vorhergehenden Beisp. die Gränzen der Größen, die deren fähig sind, statt dieser Größen selbst gesetzt; so findet man daß die Entfernung d. P. d. m. E. der Peripherie eines Halbkreises von der Grundlinie eine dritte Proportionale

ist zu $\frac{1}{4}$ Peripherie und zum Halbm.; diese letztere Entfernung ist ungefähr $\frac{11}{14}$ vom Halbmesser.

Anmerk. Der Satz, welcher den Gegenstand dieses §. ausmacht, ist, was die durch Umdrehung erzeugten Oberflächen betrift, ein Theil der von den Neuern genannten Guldinische Regel, ob sie gleich auch schon den Alten bekannt war.

§. 79.

Was über d. P. d. m. E. von dem in einerlei Ebene liegenden Punkte, und auf eine in dieser Ebene befindlichen geraden Linien bezogen, gesagt worden, erstreckt sich auf d. P. d. m. E. von im Raume befindlichen und auf einer Ebene bezogenen Punkten.

Es seien Punkte in beliebiger Anzahl der Lage nach im Raume gegeben; und dazu in gleicher Anzahl der Größe nach, gegebene Coefficienten. Es sei eine beliebige Ebene in Bezug derer die gegebenen Punkte alle auf einerlei Seite liegen. Aus diesen Punkten seien auf diese Ebene Prpd. gefällt, und seien die Prod. aus diesen Prd. mit den gegebenen corresp. Coeff. gemacht. Es sei ein Punkt da, der so beschaffen, daß ein Prpd. aus ihm auf dieselbe Ebene mit der Summe der gegebenen Coeff. multipl. gleich ist der Summe der ersten Prod.; dieser Punkt wird der P. d. m. E. der ersten Punkte für diese Coeff. genannt. Ich will darthun, daß dieser Punkt existirt, für eine

beliebige Anzahl von gegebenen Punkten, und für ebenfalls gegebene Coefficienten.

Erstes Beisp. Es seien zwei im Raume der Lage nach gegebene Punkte. Der P. ihrer m. E. in Bezug auf eine in derselben Ebene als sie liegende grade Linie, ist auch d. P. ihrer m. E. in Bezug auf eine beliebige Ebene.

Bew. Die grade Linie, welche die gegebene Punkte verbindet, die aus diesen Punkten auf eine Ebene gefällten Prpd., und die grade Linie, welche die Endp. von diesen Prpd. verbindet, liegen in einer Ebene.

Zweit. Beisp. Es seien drei Punkte A, A′, A″ der Lage nach gegeben; ich behaupte dieselbe Identität.

Bew. Statt zweier Punkte A, A′ substituire man ihren P. d. m. E. z, und bestimme d. P. d. m. E. Z von z u. A″ für die Summe der beiden ersten Coeff. und für den dritten Coefficient. So ist Z d. P. d. m. E. der drei gegebenen Punkte für die gegebenen Coeff., in Bezug auf eine beliebige Ebene.

Dritt. Beisp. Es seien 4 Punkte A, A′, A″, A‴ im Raume der Lage nach gegeben, und es seien corresp. Coeff. m, m′, m″, m‴ der Größe nach gegeben. Es sei z d. P. d. m. E. von A, A′, A″ für die corresp. Coeff. m, m′, m″, bestimme Z d. P. d. m. E. von z u. A‴ für die Coeff. $m + m' +$

m'' u. m''', ſo iſt Z d. P. d. m. E. für die gegebenen Coeff. in Bezug auf eine beliebige Ebene.

Allgemein, man habe z d. P. d. m. E. von A, A', A'', $\cdots A^{N-1}$ für die Coeff. m, m', m'', $\cdots m^{N-1}$ in Bezug auf eine beliebige Ebene beſtimmt. So wird man Z d. P. d. m. E. für die Punkte A, A', A'', A^{N-1} u. A^N beſtimmen, wenn man für z u. A^N und für die Coeff. $m + m' + \cdots + m^{N-1}$ u. m^N d. P. d. m. E. beſtimmt.

Man zeigt, wie in dem Falle, wo die Punkte in einer Ebene liegen, daß d. P. d. m. E. von der Lage nach gegebene Punkte, für der Größe nach gegebene Coeff. einzig iſt, welches auch der aus dieſen Punkten ſein mag, den man mit d. P. d. m. E. der übrigen Punkte verbindet. Es ſeien z. B. 4 im Raume der Lage nach gegebene Punkte, und die Coeff. ſeien einander gleich; dieſe vier Punkte ſind die Spitzen einer dreiſeitigen Pyramide, und d. P. d. m. E. dieſer Spitzen, iſt auf jede der graden Linien, die von einer der Spitzen nach den P. d. m. E. von den übrigen drei Spitzen gezogen werden. Man zeigt (faſt eben ſo wie für 3 Punkte §. 65.), daß dieſe 4 graden Linien ſich auch in einerlei Punkt ſchneiden, ſo daß der Theil der Linie bis zur Spitze das Dreifache von dem Theil bis zur Gegenfläche dieſer Spitze iſt.

Wenn ein Polyeder einen Mittelp. der Figur hat, ſo iſt dieſer zugleich d. P. d. m. E. von ſeinen

Spitzen. Besonders findet dieses Statt bei den regulären Körpern (ausgenommen den Tetraeder), bei den Parallelipipeden, bei den Prismen, deren Grundfl. einen Mittelp. der Figur haben, ꝛc. ꝛc.

§. 80.

Lehrs. Jede Diag. eines Parallelipipeds geht durch die P. d. m. E. von den Endp. der Kanten, welche die Enden bilden, deren Scheitel die Endp. dieser Diag. sind; und sie ist in diesen Punkten in drei gleiche Theile getheilt.

Es seien S u. s, zwei Gegenscheitel eines Parallelipipeds, und SA, SA′, SA″ die an dem ersten Scheitel S anstoßenden Kanten; sa, sa′, sa″ die Kanten an s, und respect. prll. den erstern Kanten. Die Diag. AA′, Sa″ schneiden sich in C, und die Diag. Ss begegnet A″C in Z; so ist Z der P. d. m. E. von A, A′, A″, und Ss = 3SZ.

Bew. Im Prllgrm. A″Sa″s geht A″C vom Scheitel A″ nach der Mitte C der Gegenseite; mithin (§. 65.) Z = 2SZ, u. A″Z = 2CZ. Aber im △ AA′A″ ist A″C zur Mitte der Seite AA″ gezogen, und ist in Z so geschnitten, daß A″Z = 2CZ; mithin ist Z d. P. d. m. E. von A, A′, A″. Folglich, gehet die Diag. Ss durch Z, und ist dieser Punkt so in zwei Theile getheilt, daß sZ = 2SZ.

Erste

Erste Anw. Der Prpd. aus s auf eine durch S gehende Ebene, ist das Dreifache von dem Prpd. aus Z, und gleich der Summe der Prpd. aus A, A′, A″ auf die nämliche Ebene.

Zweite Anw. Statt der durch S gehenden Ebene werde der durch S gehende Prpd. auf diese Ebene substituirt, den wir mit SB bezeichnen wollen; die aus A, A′, A″ auf der Ebene gefällte Prpd., sind resp. den, durch die aus diesen Punkten auf SB gefällte Prpd. abgeschnittenen Segmenten gleich; und hat demnach, für eine beliebige durch S gezogene grade Linie SB, die Gleich.

$$SA \cdot \mathrm{Cos}\, ASB + SA' \cdot \mathrm{Cos}\, A'SB + SA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A''SB = Ss \cdot \mathrm{Cos}\, sSB.$$

Fiele SB mit Ss zusammen, so hat man die Gleich.

$$SA \cdot \mathrm{Cos}\, ASs + SA' \cdot \mathrm{Cos}\, A'Ss + SA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A''Ss = Ss.$$

D. h. in jedem Parallelepipeden ist ein Diag. gleich der Summe der Prod., aus den aus einem ihrer Endp. gezogneten Kanten, mit dem Cos. ihrer Neigungen gegen sie.

Dritte Anw.

$$SA \cdot \mathrm{Cos}\, ASs = \frac{SA^2 + Ss^2 - As^2}{2\,Ss} = \frac{SA^2 + Ss^2 - Sa^2}{2\,Ss},$$

$$SA' \cdot \mathrm{Cos}\, A'Ss = \frac{SA'^2 + Ss^2 - A's^2}{2\,Ss} = \frac{SA'^2 + Ss^2 - Sa'^2}{2\,Ss},$$

$$SA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A''Ss = \frac{SA''^2 + Ss^2 - A''s^2}{2\,Ss} = \frac{SA''^2 + Ss^2 - Sa''^2}{2\,Ss}.$$

Hieraus

$Sa^2 = (Sa^{/2} + Sa^{//2} + Sa^{///2}) - (SA^2 + SA^{/2} + SA^{//2})$.

D. h. In jedem Parallelepiped ist das Qdrat von einer Diag. gleich dem Ueberschuß von der Summe der Qdrte der drei Diag. von den Seitenfl. die aus einer ihrer Endp. ausgehen, über die Summe der Qdrte von den Kanten, die aus demselben Endp. ausfahren.

Ferner ist

$Sa^{/2} = SA^2 + SA^{//2} - 2AS \cdot SA^{//} \cdot \mathrm{Cos}\, A^{/}SA^{//}$.

$Sa^{//2} = SA^2 + SA^{/2} - 2AS \cdot SA^{/} \cdot \mathrm{Cos}\, ASA^{//}$.

$Sa^{///2} = SA^2 + SA^{/2} - 2AS \cdot SA^{/} \cdot \mathrm{Cos}\, ASA^{//}$.

Mithin $Sa^2 + Sa^{/2} + Sa^{//2} - (SA^2 + SA^{/2} + SA^{//2})$

$= SA^2 + SA^{/2} + SA^{//2} - 2AS \cdot SA^{/} \cdot \mathrm{Cos}\, ASA^{/}$

$- 2AS \cdot SA^{//} \cdot \mathrm{Cos}\, ASA^{//}$

$- 2A^{/}S \cdot SA^{//} \cdot \mathrm{Cos}\, A^{/}SA \cdot \mathrm{Cos}\, A^{/}SA^{//} = Sa^2$.

D. h. In jedem Parallelepiped ist das Qdrt. von einer Diag. gleich dem Ueberschuß von der Summe der Qdrte der drei aus einem ihrer Endp. ausgehenden Kanten, über die doppelte Summe ihrer Prod. zu zwei und zwei, mit den Cos. von ihren Neigungen gegeneinander.

Wenn S eine rechtw. Ecke ist, so haben wir

$Sa^2 = SA^2 + SA^{/2} + SA^{//2}$.

Welches einleuchtend ist: denn in diesem Falle ist

$Sa^2 = Sa^{/2} + Sa^{//2} = SA^2 + SA^{/2} + SA^{//2}$.

D. h. In jedem rechtw. Parallelepiped ist das Qdrt.

von einer Diag. gleich der Summe von den Qdrten der drei aus einem ihrer Endp. gezogenen Kanten.

Zus. 1. Weil $Ss = zSZ$; so ist, wenn die Verlängerung SS' von sS gleich sS, der Scheitel S d. P. d. m. E. von A, A', A'', S'.

Zus. 2. Die Summe der Qdr. der vier Diag. eines Parallelep., ist gleich der Summe der Qdrt. von seinen 12 Kanten.

Anmerk. Diese Sätze von den Parallelep. können auf andern Wegen, besonders durch die sphärische Trigonom. erhalten werden, hier war der Zweck, ihr Band mit der Lehre von dem P. d. m. E. zu zeigen.

§. 81.

Man kann den P. d. m. E. für eine beliebige Anzahl im Raume gegebener Punkte, für gegebene Coeff. unmittelbar bestimmen.

Man nehme im Raume beliebig drei Ebenen, die sich in einerlei Punkte schneiden, u. z. B. winkelrecht aufeinander. Aus jedem der Lage nach gegebenen Punkte, seien auf diese Ebenen Prpd. gefället, und man mache die Prod. aus diesen Prpd. mit den corresp. Coeff. für jede Ebene; auf jede der Ebenen errichte man Prpd., so, daß ihr Prod. mit der Summe der gegebenen Coeff. gleich sei der Summe der corresp. Produkte. Durch die Endp. dieser Prpd. lege man Ebenen prllel. zu den ersten; der Begegnungsp. von die-

für drei Ebenen ist der gesuchte P. d. m. E. der gegebenen Punkte für die gegebenen Coefficienten.

Durch die Constr. hat dieser Punkt die Eigenschaft d. P. d. m. E. in Bezug auf die drei ersten Ebenen. Man muß darthun, daß er es auch in Betreff jeder andern Ebene sei.

Er ist es in Betreff einer beliebigen zu einer der ersten parallen Ebene; durch ein ähnliches Raisonnement wie im §. 67. für Punkte in einer Ebene. Es reicht hin zu beweisen, daß er es in Betreff jeder andern Ebene sei, welche beliebig durch den nämlichen Durchschnittsp. gelegt ist. Statt der drei ursprünglich beliebig gezogenen Ebenen, und statt einer neuen Ebene durch den Durchschnittsp. jener drei Ebenen, kann man drei grade Linien durch denselben Punkt respect. prpd. auf diese Ebenen substituiren, indem man statt der Prpd. auf diesen Ebenen, die durch diese graden Linien die durch Prpd. auf ihnen gemachten Segmente, von ihrem Durchschnittsp. an gerechnet, substituirt.

Es seien also A, A', A'', A''', $\ldots A^{N-1}$, A^N, im Raume gegebene Punkte, und m, m', m'', $\ldots m^N$ die corresp. der Größe nach gegebenen Coefficienten. Es seien SV, SX, SY, drei nach Belieben im Raume durch einerlei Punkt S gezogene grade Linien, und z. B. unter sich prpd. Es seien

AV, $A'V'$, $A''V''$, ... A^NV^N.
AX, $A'X'$, $A''X''$, ... A^NX^N
AY, $A'Y'$, $A''Y''$, ... A^NY^N

prpd. zu diesen graden Linien. Es sei Z d. P. d. m. E. von A, A', A'', ... A^N, für die Coeff. m, m', m'', ... m^N, und Zv, Zx, Zy seien aus Z Prpd. auf diese grade Linien. Es sei SQ eine andre grade Linie durch S, auf welcher ebenfalls AQ, A'Q', A''Q'', ... A^NQ^N, und Z Prpd. sind.

Man hat (§. 80. 2te Anm.)

$SQ = SV \cdot \mathrm{Cos}\,QSV + SX \cdot \mathrm{Cos}\,QSX + SY \cdot \mathrm{Cos}\,QSY.$

Hieraus, $\int m^N \cdot SQ^N$

$= \mathrm{Cos}\,QSV \cdot \int m^N \cdot SV^N + \mathrm{Cos}\,QSX \cdot \int m^N \cdot SX^N + \mathrm{Cos}\,QSY \cdot \int m^N \cdot SY^N$

$= \int m^N (Sv \cdot \mathrm{Cos}\,QSV + Sx \cdot \mathrm{Cos}\,QSX + Sy \cdot \mathrm{Cos}\,QSY)$

$= \int m^N \cdot Sq$ (§. 80.).

Demnach, da der Satz für die drei Axen SV, SX, SY wahr ist, so ist er wahr für jede durch S gezogene Linie, und folglich auch für jede beliebige durch S gelegte Ebene, und folglich auch für jede beliebige Ebene.

§. 82.

Es falle d. P. d. m. E. von A, A', ... A^N mit S zusammen, und durch S sei SX eine beliebige grade Linie, auf welcher man aus allen Punkten Prpd. fället. So hat man die Gleichung

$$m \cdot SA \cdot \mathrm{Cos}\, ASX + m' \cdot SA' \cdot \mathrm{Cos}\, A'SX + m'' \cdot SA'' \cdot \mathrm{Cos}\, A''SX + \ldots + m^N \cdot SA^N \cdot \mathrm{Cos}\, A^NSX = 0.$$

Diese Gleich. für im Raume liegende Punkte ist genau dieselbe, als die in Betreff auf in einer Ebene liegende Punkte (§. 70.); man kann dieselben Folgerungen daraus ziehen, durch ein gänzlich ähnliches Verfahren, welches im §. 71 und 73. angewendet worden. Insbesondre erhält man für in einerlei Ebene liegende Punkte die folgende Gleichung

$$\int m^N \cdot SA^N = \frac{\int m^{N-1} \cdot m^N \cdot A^{N-1}A^N}{\int m^N}.$$

§. 83.

Alles was in §. 75. über den Expunkt d. m. E. von in einer Ebene liegenden Punkten gesagt worden ist, läßt sich auf im Raume liegende Punkte anwenden, dieses überlasse ich dem Leser.

Ich gehe zu der Entwickelung des Bandes über, welches zwischen den Eigensch. des P. d. m. E. und die durch Ebenen begränzte Körper (Polyeder) herrscht.

§ 84.

Es sei ein beliebiger Polyeder. Aus einem Punkte im Raume seien Prpd. auf den Seitenfl. dieses Polyeders gefället, alle von innen nach außen oder umgekehrt gerichtet. Von diesem Punkt aus, seien auf

diesen Prpd. Längen proportional den correſp. Seitenfl. des Polyeders genommen. Ich behaupte, daß dieser Punkt d. P. d. m. E. von den Endp. dieſer graden Linien iſt.

Ich werde dieſen Satz zuerſt für Pyramiden beweiſen, und ihn nachgehends auf beliebige Polyeder ausdehnen.

Da alle Punktenſyſteme, die nach dem Vortrage erzeugt werden, ſich auf einander reduciren laſſen, ſo kann man die Spitze der Pyram. als den Punkt nehmen, aus welchem die Prpd. gezogen werden.

Es ſei alſo (Fig. 47.) ABCD ... LMN die Grdfl. einer Pyram., deren Spitze S iſt, und es ſeien auf den Seitenfl. ASB, BSC, CSD, ... LSM, MSN, NSA die Prpd. SA′, SB′, SC′, ... SL′, SM′, SN′ reſp. proportional zu dieſen Seitenfl. gezogen, alle von Innen nach Außen des Körpers, oder umgekehrt. Es ſei auch SP′ prd. auf der Grundl. und ihr proportional, ſo daß der Punkt P′ auf derjenigen Seite der durch S auf SP′ prpd. Ebene liegt, welche der Seite von A′, B′, C′, D′, ... L′, M′, N′ liegen, entgegeſetzt iſt; ich behaupte, daß der Punkt S d. P. d. m. E. von A′, B′, C′, ... M′, N′, P′ iſt.

Es ſei SP die Höhe der Pyram.

Es ſeien Sa, Sb, Sc, ... Sl, Sm, Sn. die Höhen der Seitenflächen. Es ſeien gezogen

Pa, Pb, Pc, ... Pl, Pm, Pn.

Punkt seien Prpd. auf den Seitenfl. einer jeden Pyram. gefället, indem man sie für jede Pyram. nach einerlei Richtung in Bezug auf den pyramidalischen Raum zieht, z. B. alle von innen nach außen. Es seien auch in derselben Richtung von S aus, die Prpd. auf den Grdfl. oder auf den Flächen des Polyeders verlängert. Alle diese Prpd. nehme man den correfp. Flächen proportional; dergestalt, daß alle diese Prpd. sich unter sich verh. wie diese Flächen.

In jeder Pyram. ist S d. P. d. m. E. von den Endp. der Prpd. auf ihre Seitenfl. und auf ihre Grdfl.; also ist er auch d. P. d. m. E. von allen Prpd. sowohl auf den Flächen des Polyeders, als auch auf den Seitenfl. von allen Pyram. Aber die Seitenfl. der Pyram. sind je zwei und zwei rückwärts zugekehrt; und die Prpd. auf diesen Flächen sind je zwei und zwei einander gleich und entgegengesetzt; mithin ist der S auch d. P. d. m. E. von den Endp. der Prpd. auf den Seitenfl. der Pyramiden; folgl. ist S auch der P. d. m. E. der übrigen Punkte, oder S ist d. P. d. m. E. von den Endp. der Prpd. auf den Flächen des Polyeders und die diesen Flächen propor. sind.

Ich schließe diese Abhandlung mit der Entwickelung desjenigen Theils der Guldinischen Regel, die den durch Umdrehung einer Ebene erzeugten Körper angehen.

§ 85.

ehnſ. Von den Winkelſp. eines Triangels fälle man Prpd. auf eine außerhalb dieſes Tr. liegende Axe. Man mache die Prod. von jeder dieſer Prpd. mit der Entfernung der beiden andern. Ich behaupte, daß der doppelte Inhalt des Tr. gleich iſt der Differenz von der Summe derjenigen zwei Rect., welche den äußern Prpd. und der dritten entſprechen.

Bew. Es ſei (Fig. 48.) $AA'A''$ ein Tr., aus ſſen Spitzen A, A', A'' man Prpd. AP, $A'P'$, $''P''$, auf eine gerade außerhalb des Tr. liegende nie fället.

Ich behaupte, daß

$$\triangle AA'A'' = \begin{cases} AP \cdot P'P'' + A''P'' \cdot PP' - A'P' \cdot PP'' \\ A'P' \cdot PP'' - AP \cdot P'P'' - A''P'' \cdot PP'. \end{cases}$$

Je nachdem der Punkt A' zwiſchen der Axe AA'' der jenſeits von AA'' in Bezug auf dieſe Axe liegt.

1) Es ſei A' (Fig. 48.) zwiſchen der Axe u. AA'':

$$\triangle AA'A'' = APP''A'' - A'P'P''A''$$

$$\triangle AA'A'' = (AP + A''P'')PP'' - (AP + A'P') \cdot PP' - (A'P' + A''P'') \cdot P'P''$$

$$= AP \cdot P'P'' + A''P'' \cdot PP' - A'P' \cdot PP''.$$

2) Es ſei (Fig. 48.) A' jenſeits AA'' in Bezug uf der Axe:

$$\triangle AA'A'' = APP'A + A'P'P''A'' - APP''A''$$

$$2\triangle AA'A'' = (AP + A'P')\cdot PP' + (A'P' + A''P'')\cdot P'P'' - (AP + A''P'')\cdot PP''$$
$$= A'P'\cdot PP'' - AP\cdot P'P'' - A''P''\cdot PP'.$$

§. 86.

Man lasse den Tr. $AA'A''$ sich um die Axe $PP'P''$ drehen, man verlangt den Ausdruck von dem Inhalt des durch diese Umdrehung erzeugten Körpers.

Es sei π der Kreisumfang, wenn der Halbm. 1 ist. Der durch den Tr. $AA'A''$ erzeugte Körper sei bezeichnet durch Körp. $AA'A''$. Diese symbolische Bezeichnung werde auch für jeden andern durch Umdrehung erzeugten Raum gebraucht.

1) Es sei A' zwischen der Axe AA''.

$$\text{Körp. } AA'A'' = \text{Körp. } APP''A'' - \text{Körp. } APP'A' - \text{Körp. } A'P'P''A''.$$

Hieraus

$$6\,\text{Körp. } AA'A'' = \pi\cdot PP''(AP^2 + AP\cdot A''P'' + A''P''^2) - \pi\cdot PP'(AP^2 + AP\cdot A'P' + A'P'^2) - \pi\cdot P'P''(A'P'^2 + A'P'\cdot A''P'' + A''P''^2)$$
$$= \pi\cdot PP'(AP + A'P' + A''P'')(A''P'' - A'P') + \pi\cdot P'P''(AP + A'P' + A''P'')(AP - A'P')$$
$$= \pi(AP + A'P' + A''P'')(AP\cdot P'P'' + A''P''\cdot PP' - A'P'\cdot PP'')$$

Es sei Z d. P. d. m. E. von A, A', A''; und es sei ZQ prpd. auf der Umdrehungsaxe:

6 Körp. $AA'A'' = 3\pi \cdot ZQ \cdot \frac{2}{3} \triangle AA'A''$;

u. Körp. $AA'A'' = \pi \cdot ZQ \cdot \triangle AA'A''$.

2) Es liege A' jenseits AA' in Bezug auf die Axe: man findet auf dieselbe Art den nämlichen Ausdruck des Körp. $AA'A''$.

Nämlich: der durch Umdrehung eines Tr. um eine außerhalb dieses Tr. liegende Axe, ist gleich einem Prisma, dessen Grundfläche der Erzeugungsfr., und dessen Höhe der durch seinen P. d. m. E. beschriebenen Peripherie ist.

Zus. Die durch einerlei Tr. erzeugten Körper, wenn sie um verschiedene Axen sich drehen, verhalten sich wie die Entf. d. P. d. m. E. der Spitzen dieses Tr. von diesen Axen.

Erste Anwend. Der durch Umdrehung eines Prllgrms um eine außerhalb des Prllgrms liegende Axe, ist gleich einem Prisma, dessen Grundfl. dieses Prllgrms und dessen Höhe die durch den Durchschnittsp. der beiden Diag. beschriebenen Peripherie ist.

Bew. Die durch die Tr., worin sich dieses Prllgrm zerlegen läßt, erzeugten Körper sind resp. gleich den Prismen, deren Grundfl. diese Tr., und deren Höhe die durch d. P. d. m. E. ihrer Winkelsp. beschriebenen Peripherie ist.

Die Summe von diesen Körpern, ist gleich einem Prisma, dessen Grundfl. einer von diesen Tr., und dessen Höhe die Summe dieser zwei Peripherien, oder das

Aufl. $AA'A''\ldots A^N = \pi(AA'A''.Z'P' + AA''A'''.Z''K''$
$+ \ldots AA^{N-1}A^N.Z^{N-1}P^{N-1})$
$= \pi AA'A''.A^{N-1}A^N.ZP.$

Folglich, wenn das Polygon $AA'A''\ldots A^N$ gegeben ist, so kann man den Punkt Z so bestimmen, daß der durch Umdrehung dieses Polygons erzeugte Körper, der Entfernung dieses Punktes von der Umdrehungsaxe proportional sei; dergestalt, daß dieser Körper gleich einem Prisma ist, dessen Grundfl. die Erzeugungs-Figur, und dessen Höhe, die durch diesen Punkt beschr. Peripherie ist.

Die Lage von diesem Punkt, will ich auf eine strengere Art bestimmen.

§ 88.

Aus einem der Winkelsp. eines Tr. sei eine grade Linie L nach der Mitte der Gegenseite gezogen, und es seien zu dieser Seite Parallelen zwischen den andern Seiten gezogen. Die P. d. m. E. von jeder dieser Parallelen liegen in der Linie L. Es seien in und um diesen Tr. Prllgrme beschr., die zu Grdl. diese Prllen., und ihre andern Seiten seien prll. zu L. Die Mittelp dieser Prllgramme liegen in L, und jeder dieser Mittelp. heißt d. P. d. m. E. des corresp. Prllgrms.

Man multipl. diese Prllgramme mit den Prpd. aus seinem P. d. m. E. auf einer Axe. Man nehme

die Summe dieser Prod., die eine in Betreff der eingeschriebenen und die andere in Betreff der umschr. Prllgramme. Jede dieser Summen dividire man mit den Summen der corresp. Prllgramme; die Quotienten sind die Entfernungen der P. d. m. E. der bekannten Mittelp. dieser Prllgramme von der Axe für die durch diese Prllgramme selbst ausgedrückte Coeff., und folgl. die Entf. der P. d. m. E. von der Spitze dieser Prllgramme von der Axe. Sehe man von der Summe der Prllgramme zum Tr., der davon die Gränze ist, über, so erhält man die Entf. d. P. d. m. E. des Tr. selbst von der Axe. Dieser Mittelp. liegt in jedem L., folgl. in ihrem Durchschnittsp., und fällt mit den P. d. m. E. von den Winkelsp. der Tr. zusammen.

Eine beliebige gradlinige Figur werde in Tr. zerlegt, die zum gemeinsch. Scheitel eine von den Winkelsp. der Fig. haben. Es seien die besondern Mittelp. von den P. d. m. E. von jedem dieser Tr. aufgesucht; nachgehends sei d. P. d. E. dieser besondern Mittelp. für Coeff. genommen, die diesen Tr. proportional sind. Der erhaltene Punkt ist der P. d. m. E. von diesen Tr. zusammengenommen; folgl. ist er d. P. d. m. E. von der Figur.

Man hat also folgenden Satz:

Der durch Umdrehung einer gradl. Figur um eine Axe erzeugte Körper ist gleich einem Prisma, dessen Grund-

Grundfl. die Erzeugungsfigur, und deſſen Höhe, die durch ihren P. d. m. E. beſchr. Peripherie iſt.

Man wende auf krummlinige Figuren, als Gränzen von gradl. Figuren, dasjenige an, was für jede gradl. Figur wahr iſt, ſo erhält man folgenden allgemeinen Satz: In jeder ebenen Figur giebt es einen Punkt, P. d. m. E. genannt, ſo, daß wenn man dieſe Fig. um irgend eine Axe ſich drehen läßt, der durch dieſe Umdrehung erzeugte Körper gleich iſt einem Prisma, deſſen Grdfl. dieſe Fig., und deſſen Höhe die durch d. P. d. m. E. der Fig. beſchr. Peripherie iſt.

Es ſei irgend eine Fig. orthographiſch auf eine Ebene entworfen; der prism. Stumpf, deſſen Grundfl. dieſe Projection iſt, deſſen obere Grundfl. die Fig. ſelbſt iſt, und deſſen Höhe der aus ihren P. d. m. E. auf die Ebene der Projection gefällte Prpd. iſt. Es iſt nämlich dieſer Satz für die Tr. wahr; deshalb gilt er auch für jede gradlinige Fig., und nach der allgemeinen Lehre von den Gränzen iſt er auch für jede Fig. wahr.

§. 89.

Wenn man die Größe von einer ebenen Fig. und auch die Größe des durch Umdrehung dieſer Figur um eine Axe erzeugten Körper kennt, ſo beſtimmt man die Entf. d. P. d. m. E. dieſer Fig. von dieſer Axe.

Zu diesem Ende dividire man den bekannten Inhalt des Körpers durch den bekannten Inhalt der Figur, so ist der Quotient die durch d. P. d. m. E. beschr. Peripherie, und folgl. die Peripherie, deren Halbm. die Entf. d. P. d. m. E. von der Axe ist.

Erstes Beisp. Es sei ein Trapez, dessen prlle Seiten b, b′ auf einer als Höhe genommenen Linie h winkelrecht stehen; dieses drehe sich um die Höhe.

Der Inhalt des Trp. ist $\frac{b+b'}{2} \cdot h$.

Der Inhalt des durch die Umdrehung dieses Trp. erzeugten abgekürzten Kegels, ist

$$\frac{b^2 + b \cdot b' + b'^2}{3} \cdot \pi h;$$

die durch d. P. d. m. E. des Trap. beschr. Peripherie ist

$$2\pi \cdot \frac{b^2 + b \cdot b' + b'^2}{3(b+b')};$$

die Entf. des P. d. m. E. von der Axe ist

$$\frac{b^2 + b \cdot b' + b'^2}{3(b+b')} = \frac{b+b'}{3} - \frac{b \cdot b'}{3(b+b')}.$$

Zweit. Beisp. Ein Halbkr., dessen Halbm. r, drehe sich um seinen Durchm.

Die Fläche des Halbkr. ist $\frac{1}{2}\pi r^2$.

Die durch ihn erzeugte Kugel $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Hieraus, die Peripherie, die durch den P. d. m. E. von dem Halbkr. beſchr. iſt, gleich

$$\frac{4}{3}\pi r^3 : \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{8}{3}r.$$

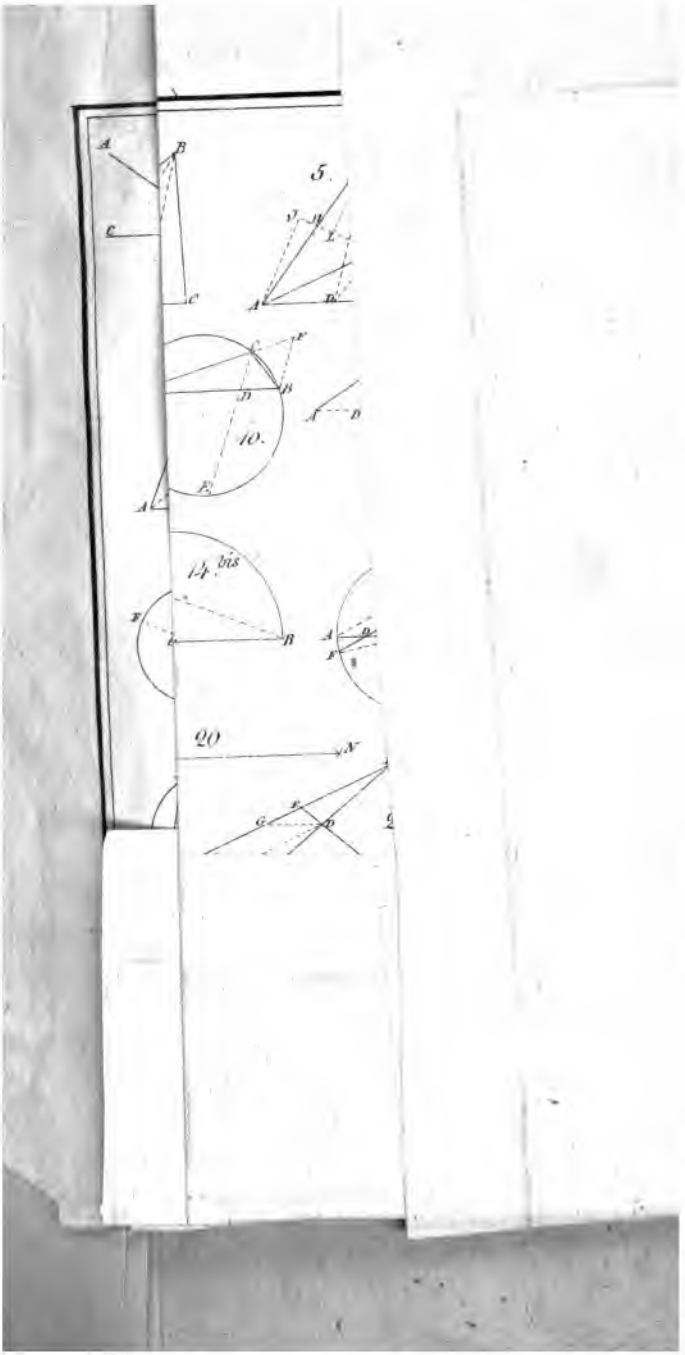
Demnach iſt die Entf. des P. d. m. E. eines Halbkr. von ſeiner Grdl. $\frac{8}{3}r \cdot \frac{1}{\pi}$.

Es ſei $\pi = \frac{22}{7}$. (dem genäherten-Archimediſchen Verh. gemäß); ſo ergiebt ſich dieſe Entf. $\frac{14}{33}r$ beinahe. Der Bruch liegt zwiſchen den Brüchen $\frac{2}{5}$ und $\frac{1}{2}$.

Berlin, gedruckt bei Auguſt Petſch.

Druckfehler.

Seite 56	Zeile 3 v. u.	lies Lehrsatz statt Aufgabe.
— 155	— 1 v. u.	l. ihrer st. ihre
— 241	— 5 v. o.	l. L st. A
— 542	— 12 v. o.	l. CP′ st. CP
— 400		l. Parallelepipeden st. Parallelipipeden


A
B
C
5.
10.
14. bis
20